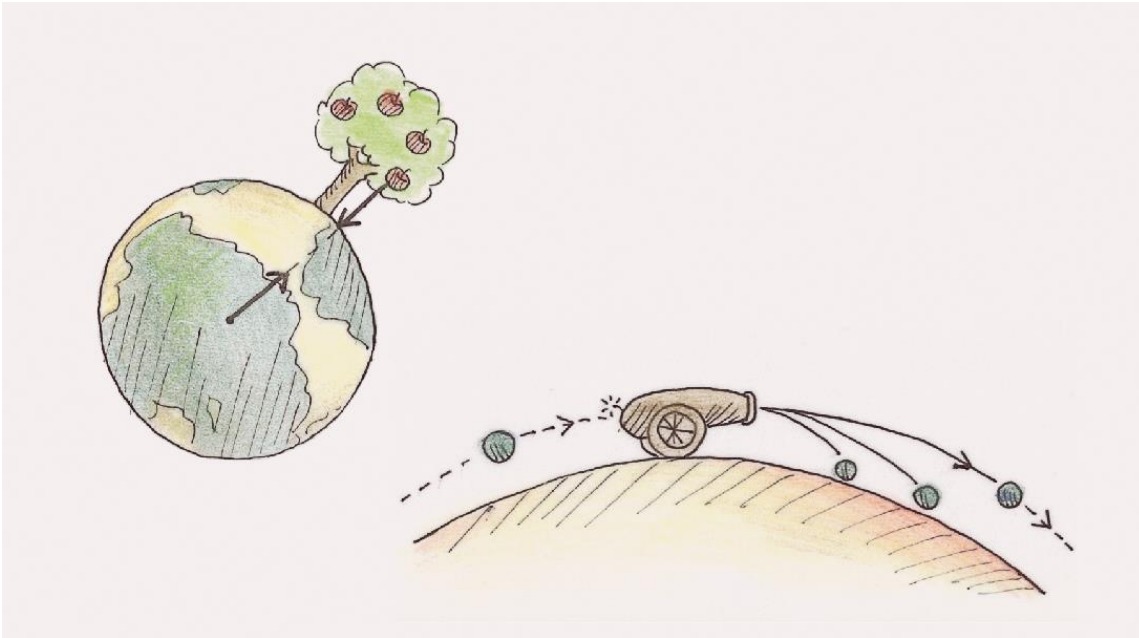


5장: 만유인력

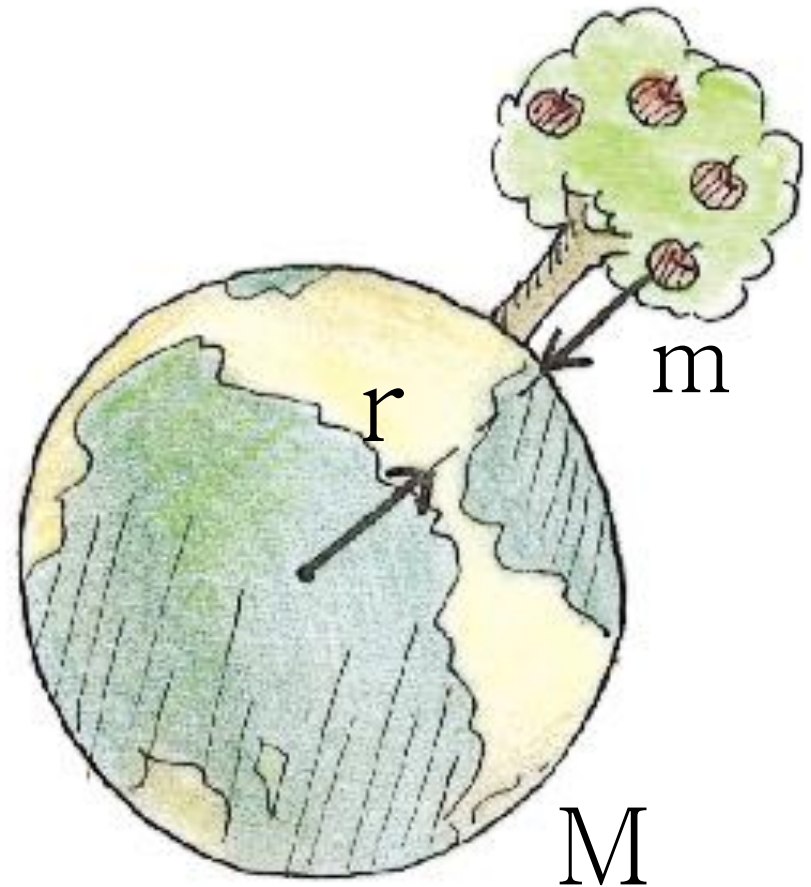


1. 만유인력과 원운동
2. 케플러 법칙 - 행성의 운동

만유인력

$$F = G \frac{Mm}{r^2}$$

만유인력의 크기는
질량에 비례하고
두 질량 사이의 거리의 제곱에 반비례한다.



작용 반작용

지구는 사과를 끌어 당긴다.
사과도 지구를
같은 힘으로 잡아당긴다.



이 두 힘은 작용-반작용의 쌍을 이룬다.

중력상수

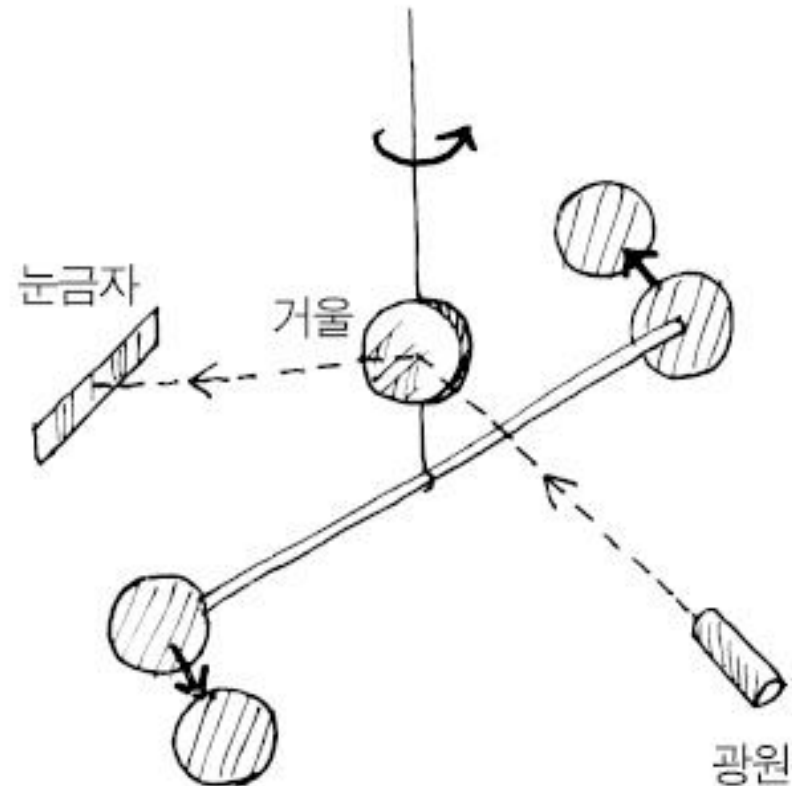
중력상수 G 는
뉴턴의 만유인력 법칙이 알려진 지
약 100년이 지나서야
1798년 캐번디시가 최초로 정밀하게 측정했다.

$$G = 6.673 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{kg}^2$$

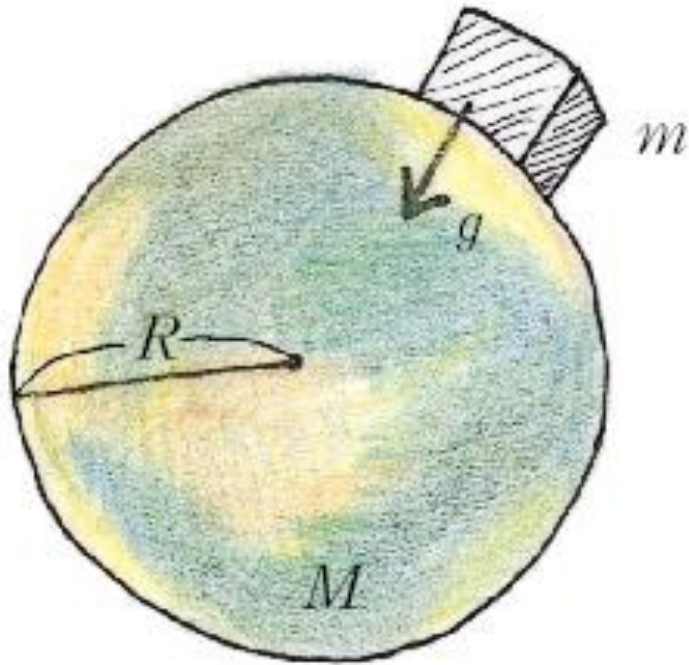
캐번디시 실험 (1798)

만유인력을
비틀림 저울로
측정한다.

금속 실에 달린 거울에
반사된 빛으로
실이 비틀린 정도를
알아내어 힘을 측정한다.



지구 질량의 측정



중력상수 G 를 알면
지구의 질량 M 을
알 수 있다.

$$mg = G \frac{Mm}{r^2}$$

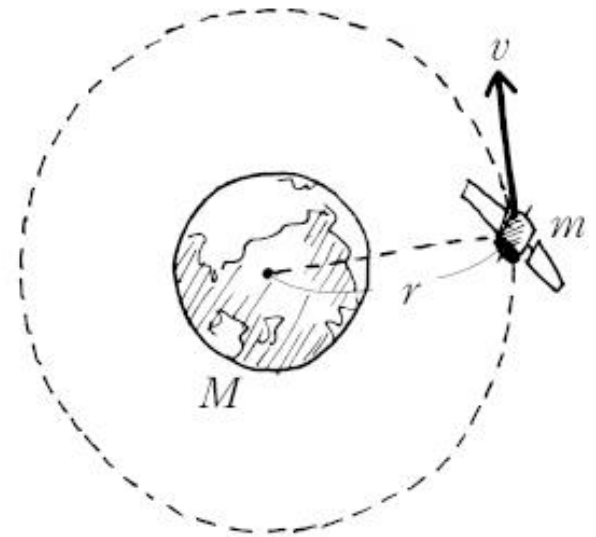
인공위성

인공위성은 만유인력 덕분에
지구 주위를 저절로 원운동하고 있다.

정지위성은
언제나 우리의 상공에 머무른다.

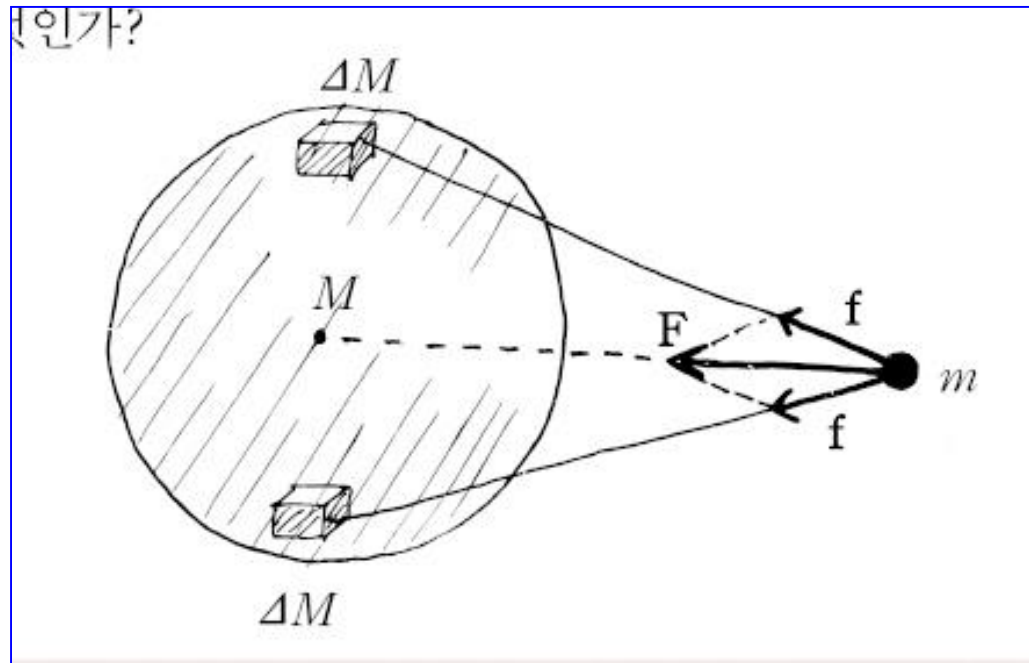
주기가 1 일이 되려면
정지위성은 지상 약 $36,000 \text{ km}$ 위에 떠있어야 한다.

지상으로부터 정지위성까지 빛이 가는데 0.12 초 걸린다.



중력의 방향

지구는 크기가 있는데도 위성이 받는 힘은
왜 지구 중심을 향하는가?

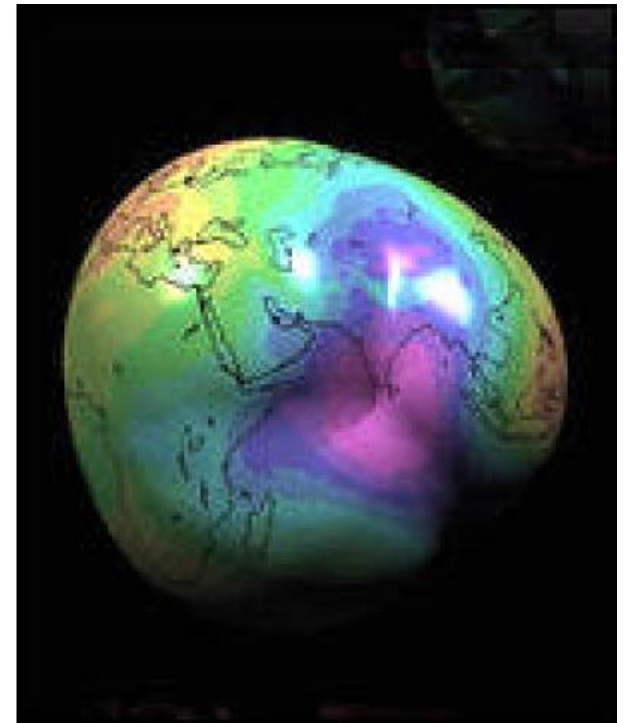


뉴턴: 지구가 공처럼 대칭이기 때문에
지구 중심에 총 질량이 당기는 힘과 같다.

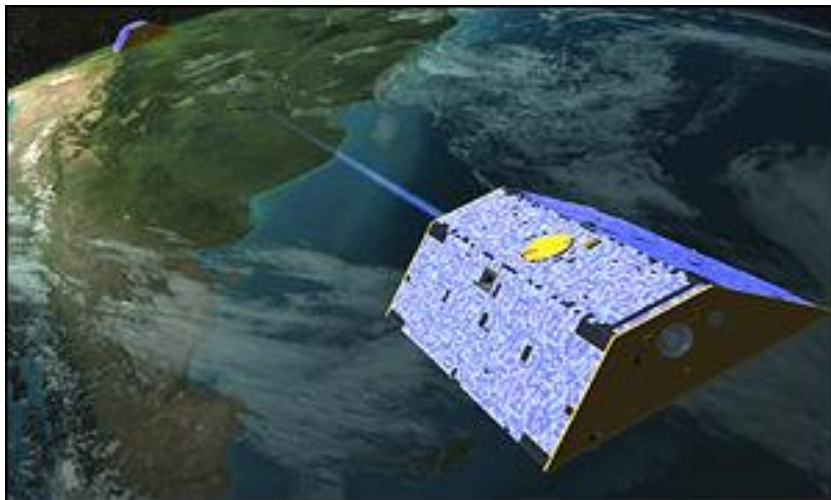
미세한 중력의 차이

그러나 지구를 구성하는 물질은 균등하고 대칭적으로 퍼져있지 않고 밀도나 그 종류가 다르다.

따라서 지상의 중력장은 위치에 따라서 변화한다.

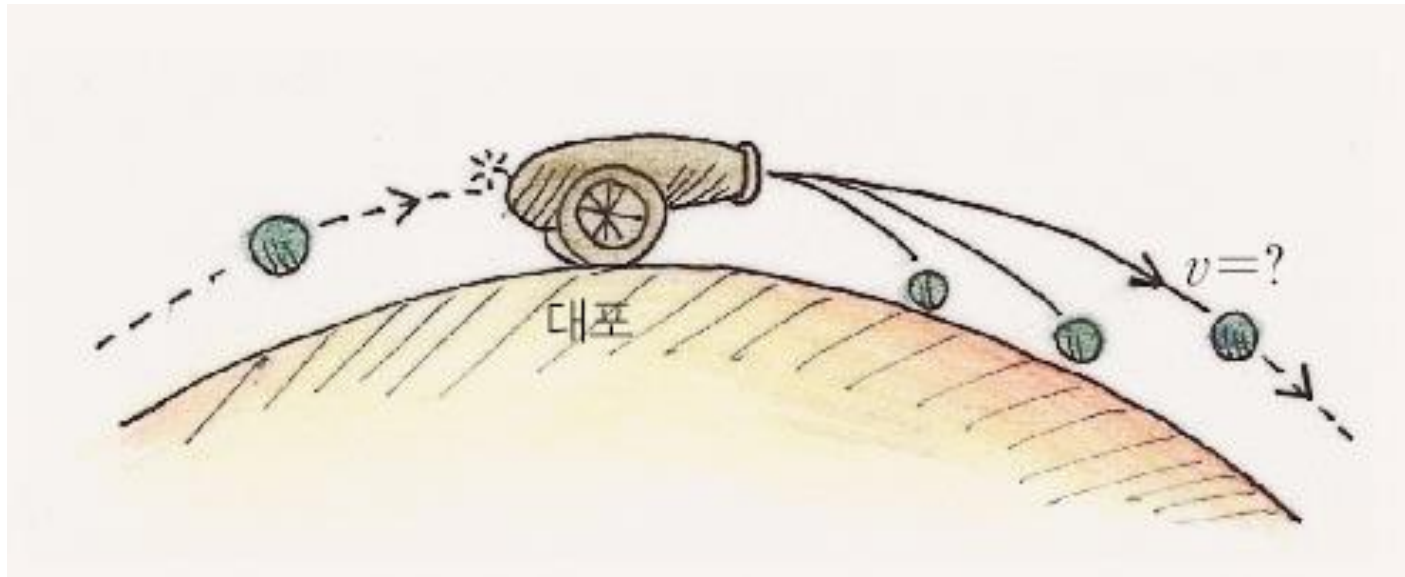


지상의 중력 지도는 울퉁불퉁하다



2002년 3월 지상 500 km 궤도로 올려진 두 위성 Tom과 Jerry는 서로 200 km 떨어진 채 하루 16번 지구를 돌면서 지상의 미세한 중력차이를 찾아내고 있다.

뉴턴의 사과와 위성

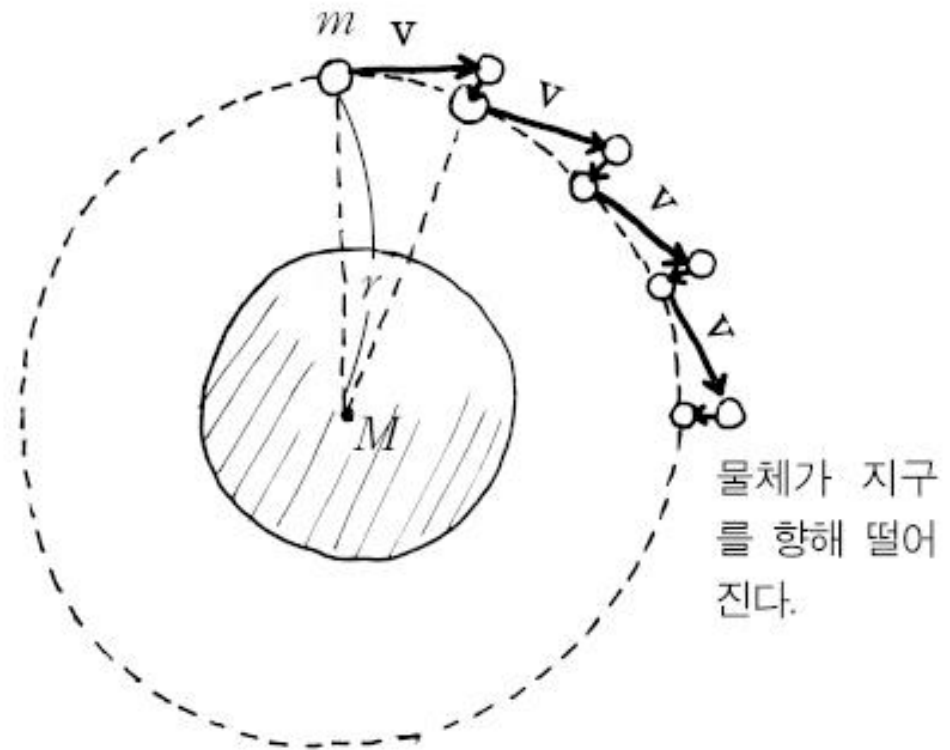


뉴턴의 사과는 지상으로 떨어진다.
그러나 달이나 인공위성은 왜 사과처럼
지구로 떨어지지 않는가?

위성의 자유낙하

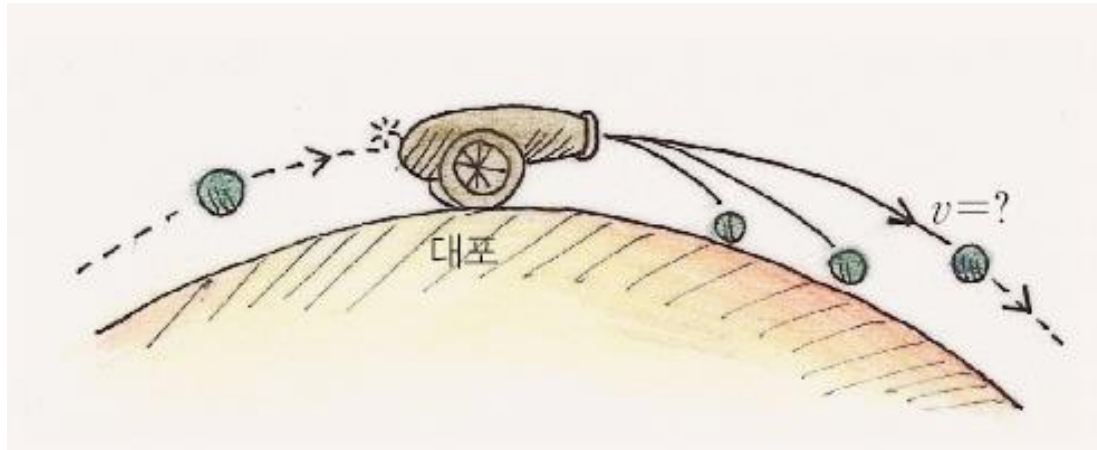
뉴턴의 사과와 마찬가지로 위성도 만유인력때문에 지구를 향해 떨어진다.

다만 지구 주위를 도는 속도가 있기 때문에 지구중심 방향으로 곧바로 떨어지지 않고 비스듬히 이동하면서 나선형을 그리면서 지구중심을 향해 떨어진다.



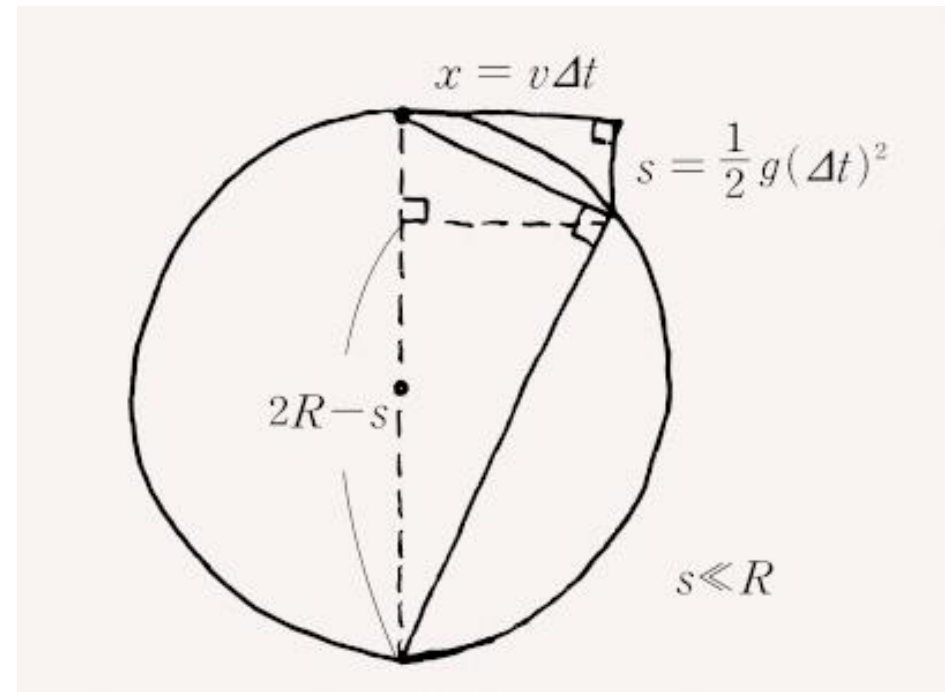
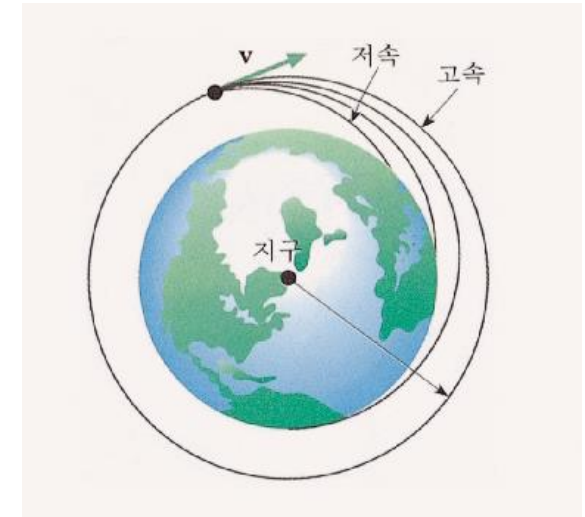
포탄과 위성

지상에서 수평으로 발사된 포탄이 위성이 되기 위해 필요한 속도는?



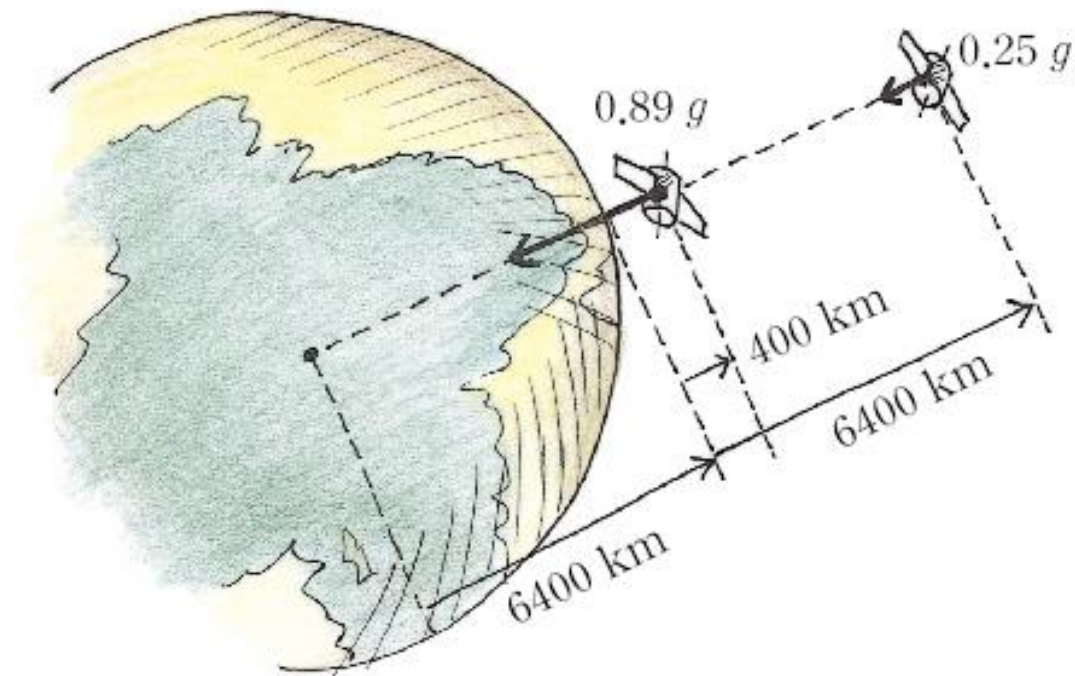
포탄의 궤도

포탄이 떨어지는 궤도를
2개의 닮은 삼각형과 비교해보자.

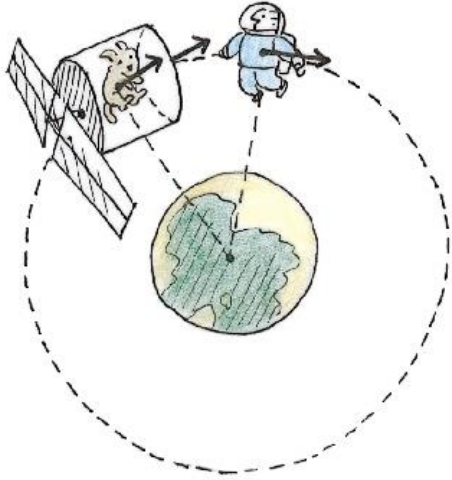


우주정거장에서의 만유인력

지상의 높이에 따라 중력가속도는 그림처럼 줄어든다.



우주비행사와 무중력

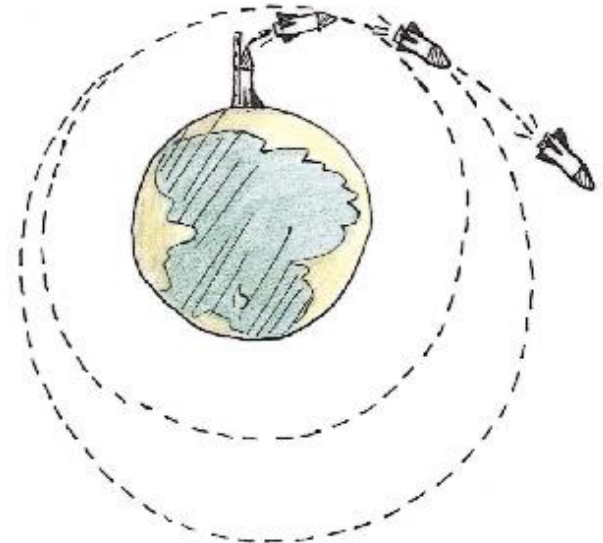


중력을 받는데도 우주정거장 안에 있는 우주비행사는 왜 둥둥 떠다닐 수 있는가?

우주선과 비행사를 원 궤도에 올리기 위해서는 추진력이 필요하다.

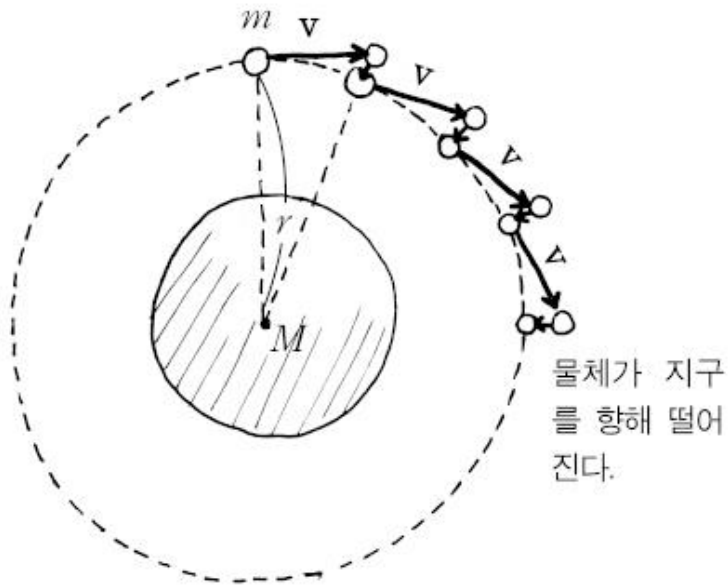
그러나 이들이 원 궤도를 돌기 시작하면 더 이상의 추진력이 필요 없다.

이 때는 우주정거장과 우주비행사 모두 만유인력을 받아 자유낙하 하는 것과 같다.

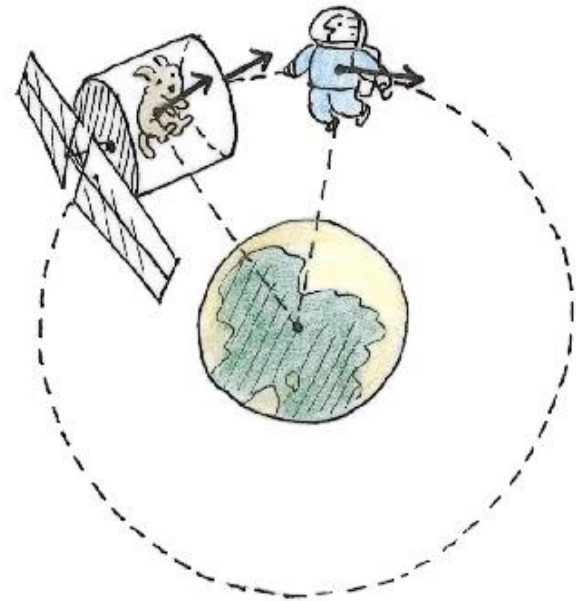


우주비행사와 무중력

우주정거장과 우주 비행사가 원 궤도를 따라 지구 표면으로 같이 떨어진다.



물체가 지구를 향해 떨어진다.



따라서 우주 정거장 안에 있는 우주 비행사는 중력이 없어진 것으로 느낀다.

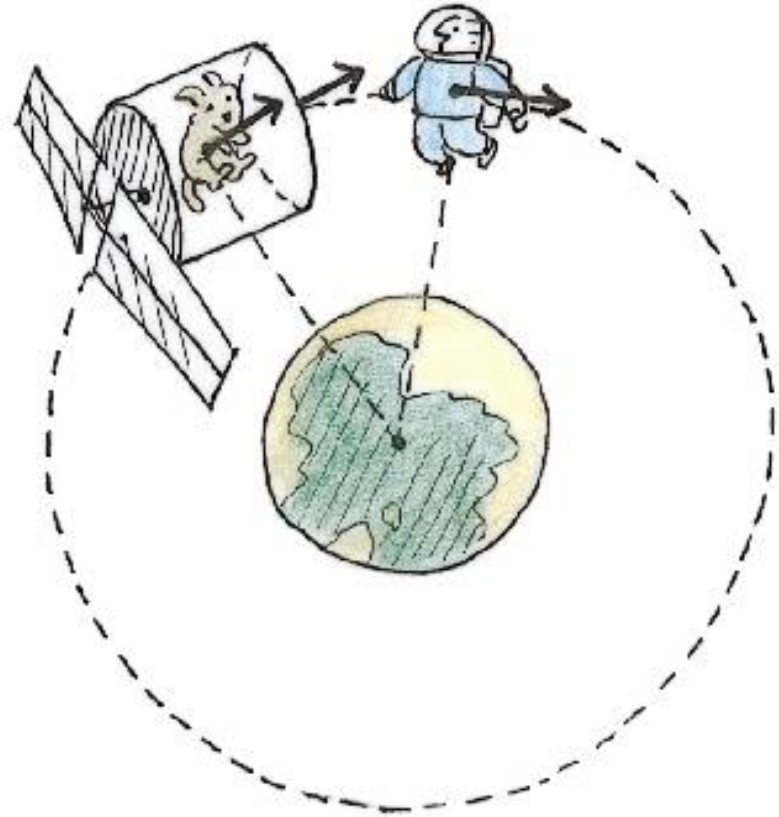
지상에서의 무중력 체험

지상에서
무중력은 어떻게
체험할 수 있을까?

1. 물 속에서

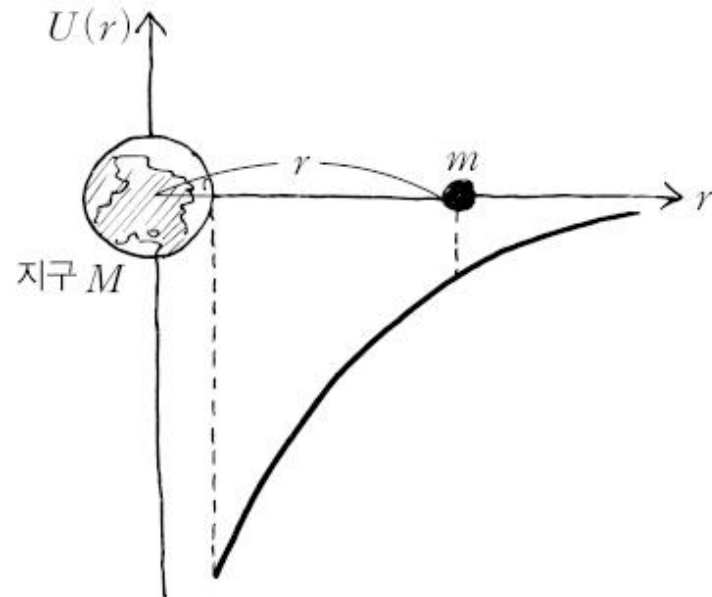
2. 비행기 안에서

...



지구 탈출하기

지구의 중력을 완전히 벗어나 지구를 탈출하려면
로켓은 지상에서 최소한 어떤 속력으로 출발해야 하는가?



지구를 탈출하려면
지구 표면에서의 역학적 에너지가
무한대에서의 위치에너지보다 같거나 커야 한다.

흑성 탈출속도

탈출속도

물 체	질량 (kg)	반지름 (m)	탈출속력 (km/s)
케레스	1.77×10^{21}	3.8×10^6	0.64
지구의 달	7.36×10^{22}	1.74×10^6	2.38
지구	5.98×10^{24}	6.37×10^6	11.2
목성	1.90×10^{27}	7.15×10^7	59.5
태양	1.99×10^{30}	6.96×10^8	618
시리우스 B	2×10^{30}	1×10^7	5200
중성자별	2×10^{30}	1×10^4	2×10^5

에로스 소행성

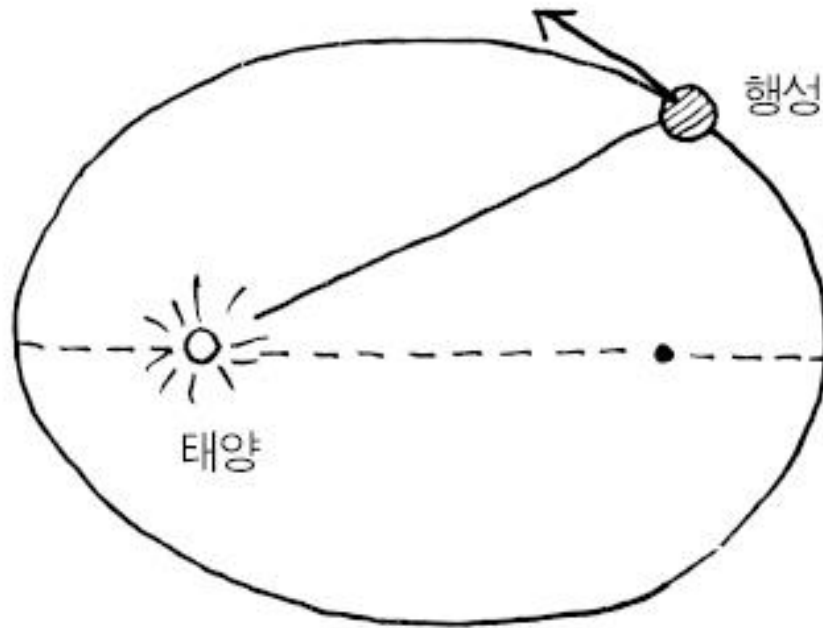


에로스 소행성은 태양을 중심으로 공전하며 주기가 1.76년이다. 크기는 $33\text{km} \times 13\text{km} \times 13\text{km}$ 로 감자 모양으로 생겼다. 에로스에서의 중력은 지표면에 비해 약 1600배 정도 작다. 에로스에서의 탈출속도는? 편의상 평균반지름이 약 10 km인 구형으로 생각한다.

우주선 NEAR는 2001년 2월 12일 소행성 벨트에 있는 에로스의 화살표지점에 착륙했다.

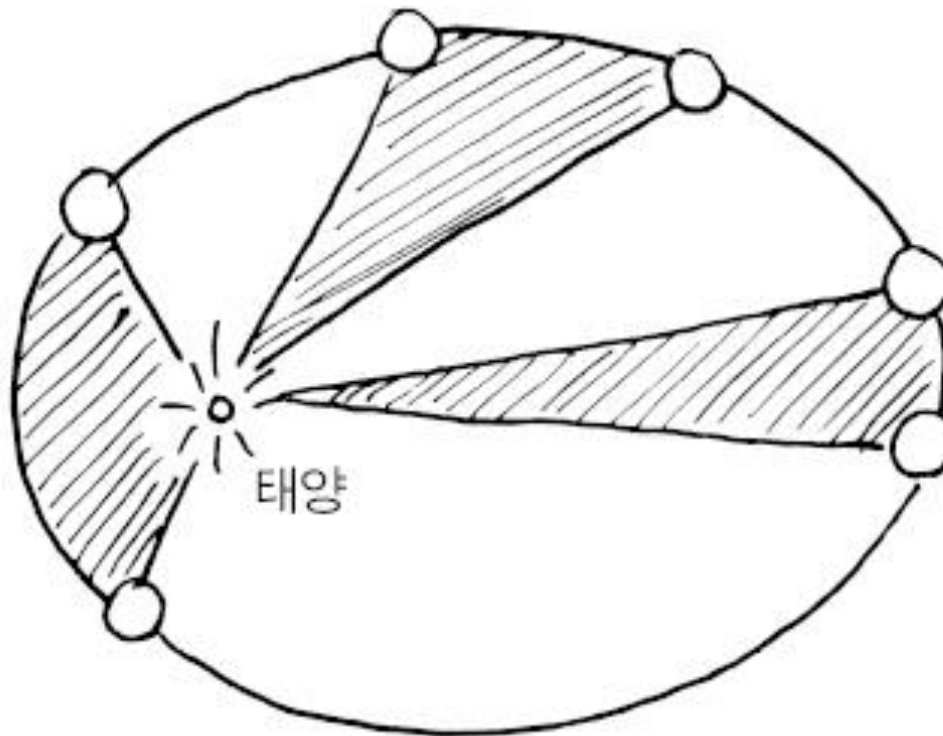
케플러 법칙

I. 행성은 태양을 초점으로 하는 타원궤도를 돈다.



케플러 법칙

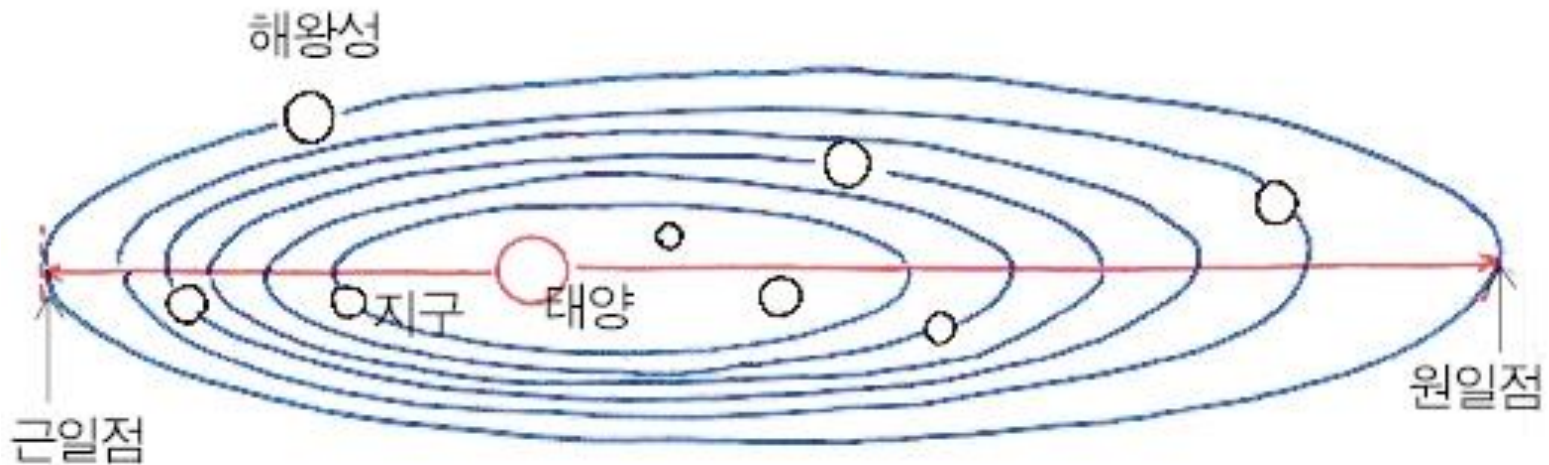
- II. 행성이 같은 시간 동안에 움직여 만드는 부채꼴 면적은 언제나 같다. 따라서 행성이 태양에 가까이 있을수록 더 빨리 공전한다.



케플러 법칙

III. 행성의 궤도운동의 주기의 제곱은 타원의 긴 반지름의 세 제곱에 비례한다.

$$T^2 \propto R^3$$



행성의 궤도

행성의 궤도 : 주기, 긴반지름, T^2/R^3

행 성	주기(s)	긴반지름(m)	T^2/R^3
수성	7.6×10^6	5.79×10^{10}	2.97×10^{-19}
금성	1.94×10^7	1.08×10^{11}	2.99×10^{-19}
지구	3.156×10^7	1.496×10^{11}	2.97×10^{-19}
화성	5.94×10^7	2.28×10^{11}	2.98×10^{-19}
목성	3.74×10^8	7.78×10^{11}	2.97×10^{-19}
토성	9.35×10^8	1.43×10^{12}	2.99×10^{-19}

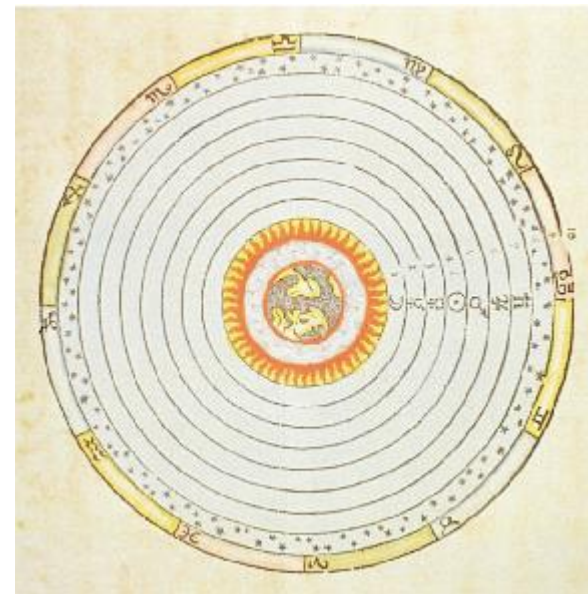
지동설

지구는 정말로 태양을 중심으로 공전하는가?

만유인력에 의하면 지구와 태양은 똑같이 힘을 주고받는다.
지구가 태양을 중심으로 공전한다면, 똑같은 논리로
태양도 지구를 중심으로 공전한다고 말할 수 있지 않을까?



코페르니쿠스의 지동설?

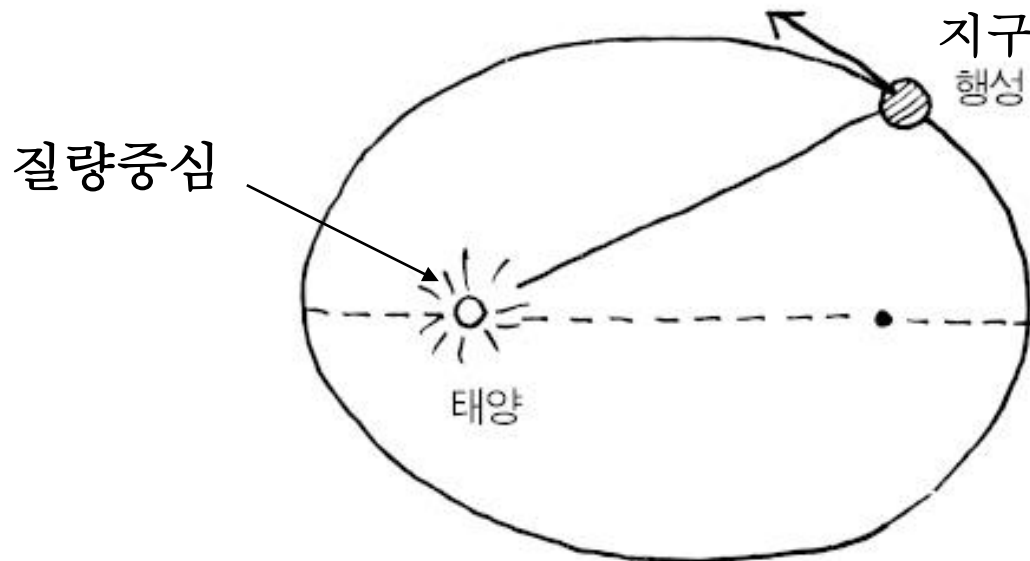


프톨레미우스의 천동설?

지동설

지구와 태양은 지구와 태양의 질량중심을 중심으로 회전한다.

태양의 질량은 지구질량의 약 330,000 배이고,
태양과 지구의 질량중심은 태양의 중심부근에 있다.



따라서 지구는 태양을 중심으로 공전한다.
지구가 가볍기 때문에 무거운 태양 주위를 공전한다.

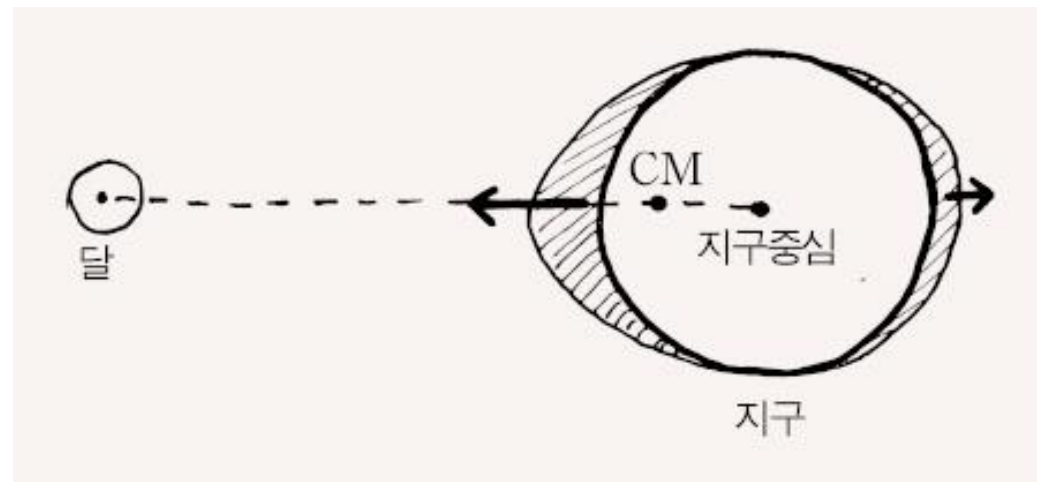
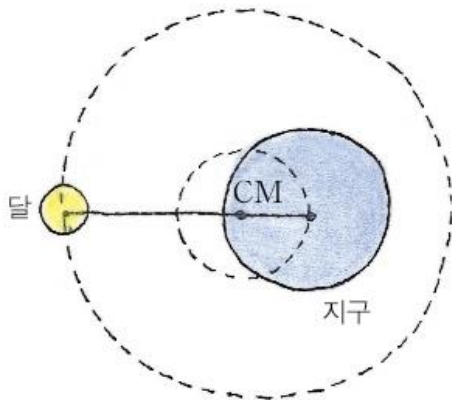
지구와 공전하는 달

지구의 질량은 달의 질량의 80배 정도이다. 달과 지구의 질량중심 (CM)은 지구의 중심으로부터 지구반지름의 약 3/4 정도에 있다.

달이 지구주위를 도는 것처럼 보이지만, 실제로는 지구도 달의 영향을 상당히 받는다. 지구도 CM을 중심으로 작은 원을 그리며 그림처럼 돈다.

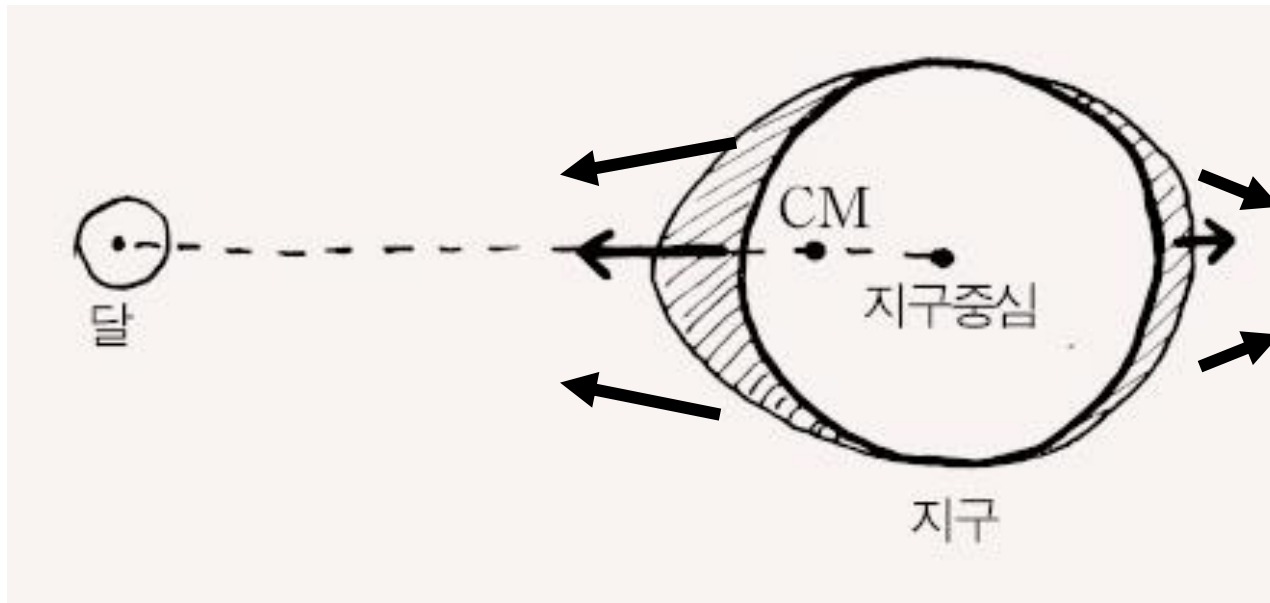
지구와 달이 CM을 중심으로 돌기 때문에 결과적으로 조석 간만의 주기는 지구의 자전의 주기인 24시간이 아니라 12시간이다.

지구 중심에서는 구심력과 달이 작용하는 중력이 같다. 그러나 지구 표면의 바닷물에서는 **두 힘이 비기지 않는다.**



지구와 공전하는 달

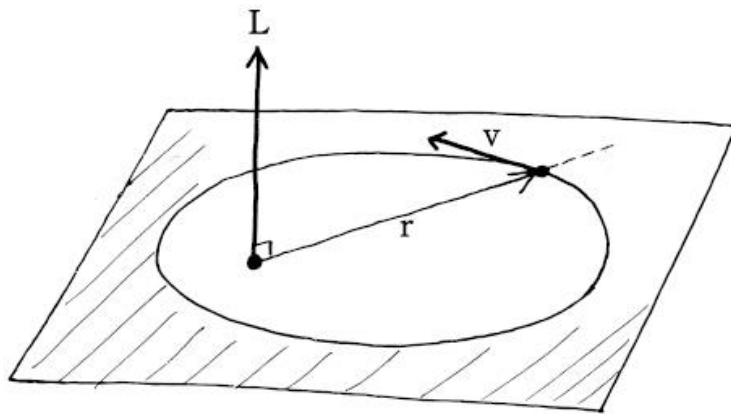
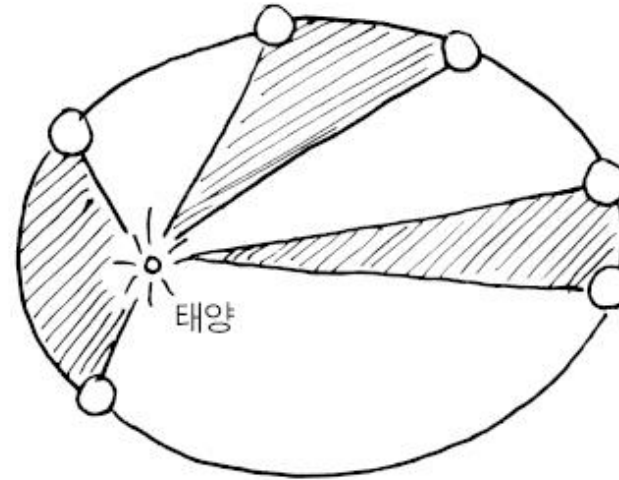
달 가까운 표면에서는 달에 의한 중력이 더 크고
반대 표면에서는 달에 의한 중력이 더 작다.



결과적으로 지구의 양쪽에서는
조력 (tidal force)이 생겨나고 바닷물이 높아진다.
이 간만의 차는 지구가 자전함에 따라 12시간마다 반복한다.

케플러 제2법칙과 각운동량의 보존

행성이
같은 시간 동안에
움직여 만드는
부채꼴 면적은
언제나 같다.

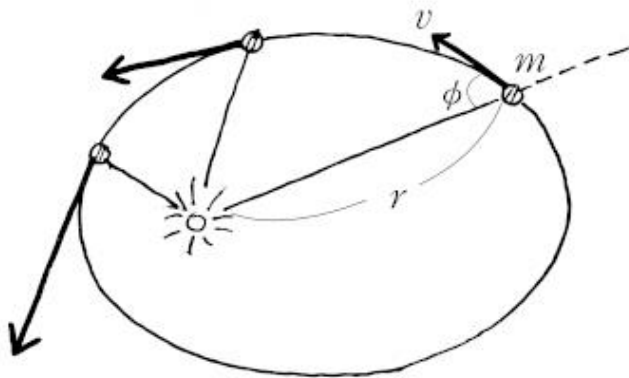
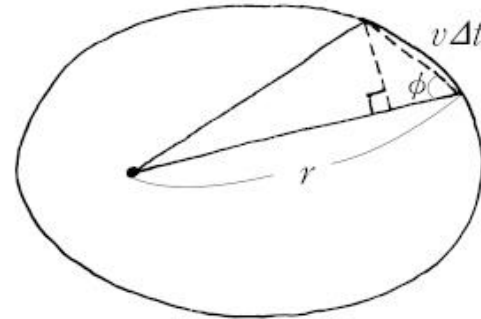


만유인력은 중심력이므로
행성이 받는 토크는 0이며,
행성의
각운동량은 보존된다.

케플러 제2법칙과 각운동량의 보존

행성이 쓸고 가는 면적:

$$\Delta A = \frac{1}{2} r (v \Delta t) \sin \phi$$



$$L = rmv \sin \phi$$

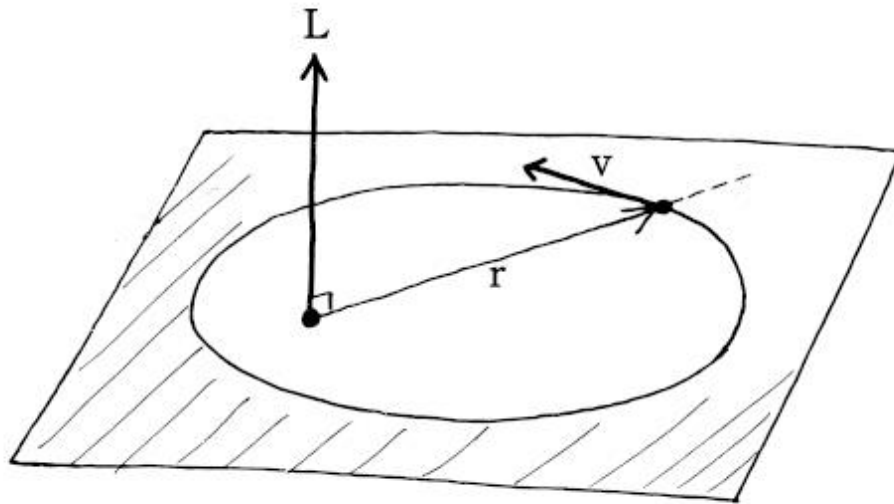
각운동량 벡터의 크기는
이 면적에 비례한다.

$$\Delta A = \frac{L}{2m} \Delta t \quad \longrightarrow$$

$$\therefore \frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{L}{2m}$$

케플러 제2법칙과 각운동량의 보존

각운동량이 보존되므로,
같은 시간에 행성이 쓸고 가는 면적은 어느 위치에서나 같다.



케플러 제 2법칙은
행성운동의 각운동량이 보존된다는 것을 의미한다.

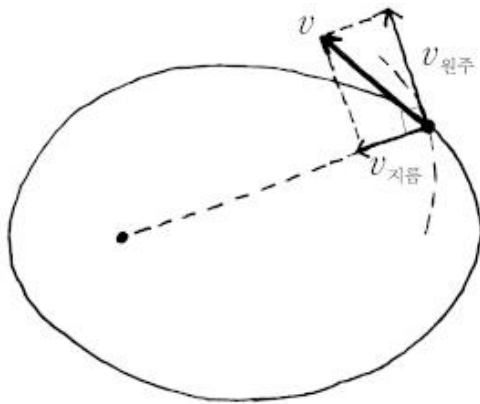
케플러 법칙과 역학적 에너지 보존

행성이 가지는 역학적 에너지는
운동에너지와 중력위치 에너지의 합이다.

$$E = K + U$$

역학적 에너지는 보존된다.

역학적 에너지의 다른 표현



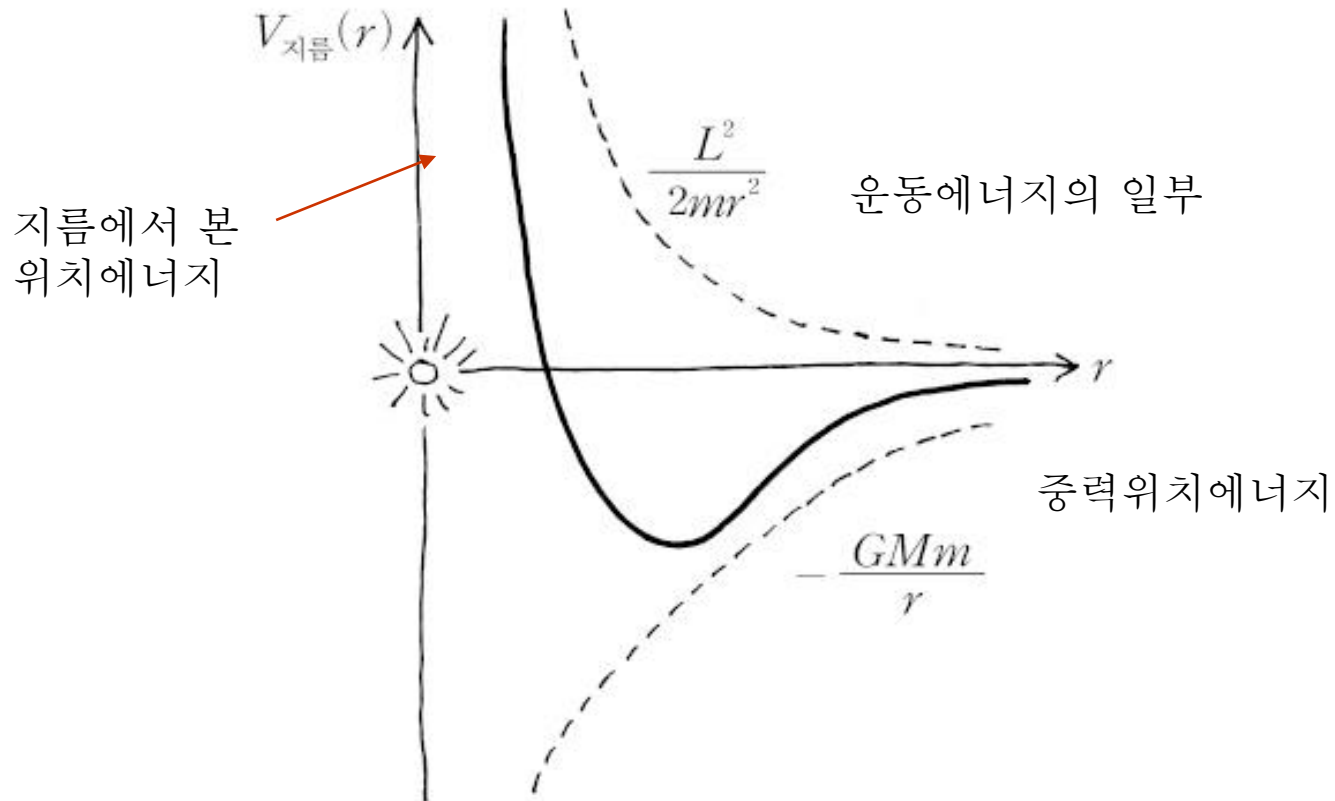
운동에너지
= 지름방향의 운동에너지
+ 원주 방향의 운동에너지

역학적 에너지

= 운동에너지 + 위치에너지

= 지름방향의 운동에너지 + 지름에서 본 위치에너지

지름 방향의 운동

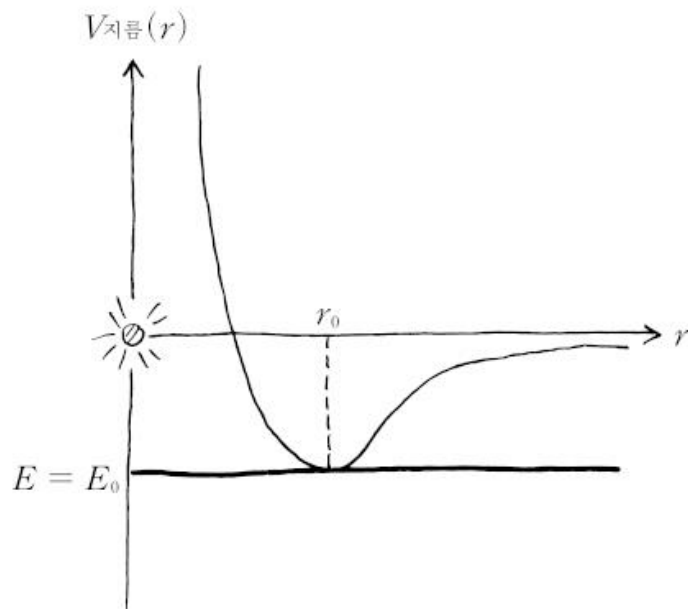


역학적 에너지

=지름방향의 운동에너지+ 지름에서 본 위치에너지

원궤도와 타원궤도

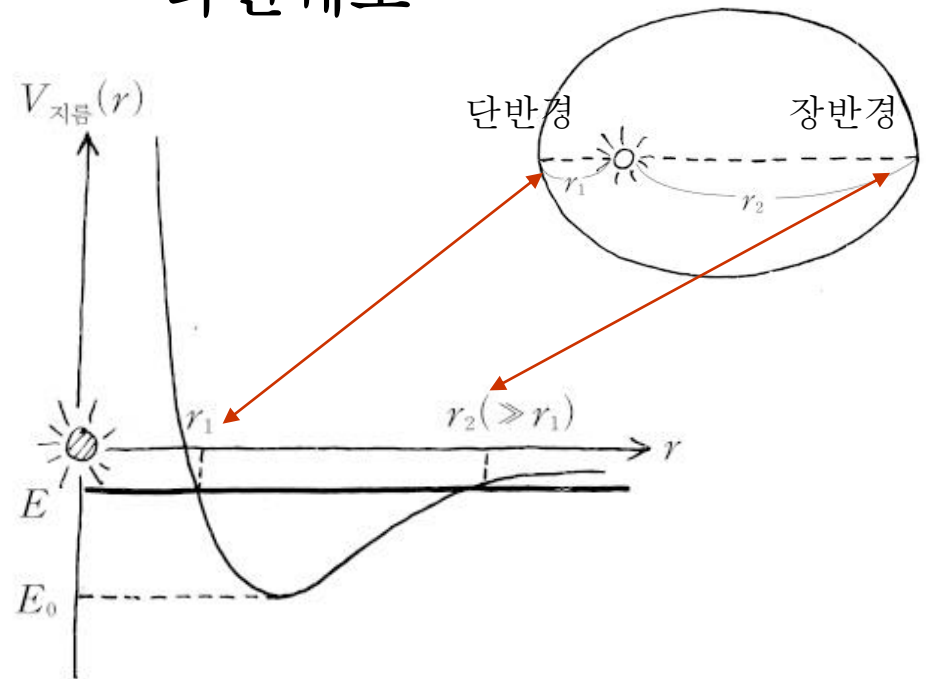
원궤도



역학적 에너지 E 가
지름에서 본 위치에너지의
최저값과 같다.

궤도 반지름은 변하지 못한다.
따라서 궤도는 원이다.

타원궤도



에너지가 위치에너지 최소값보다 크고
0보다 작다.

행성은 긴 반지름과 짧은 반지름 사이에서
타원 운동한다.

단원요약

◆ 만유인력

$F = Gm_1m_2/r^2$, 만유인력상수 $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ N m}^2/\text{kg}^2$

◆ 중력 위치에너지: $U(r) = -Gm_1m_2/r$

◆ 케플러 행성운동법칙

- 제1법칙: 행성은 태양을 초점으로 타원궤도를 돈다.

- 제2법칙: 한 행성이 동일한 시간에 태양을 기준으로 움직여 만든 부채꼴

면적은 그 행성 궤도 어디에서나 일정하다.

- 제3법칙: 모든 행성 궤도 운동의 주기의 제곱은 타원의 긴 반지름의 세제곱에 비례하며 그 비례상수는 행성에 상관 없이 일정하다.

◆ 만유인력은 케플러 행성운동법칙의 명확한 이론적 설명을 제공한다.