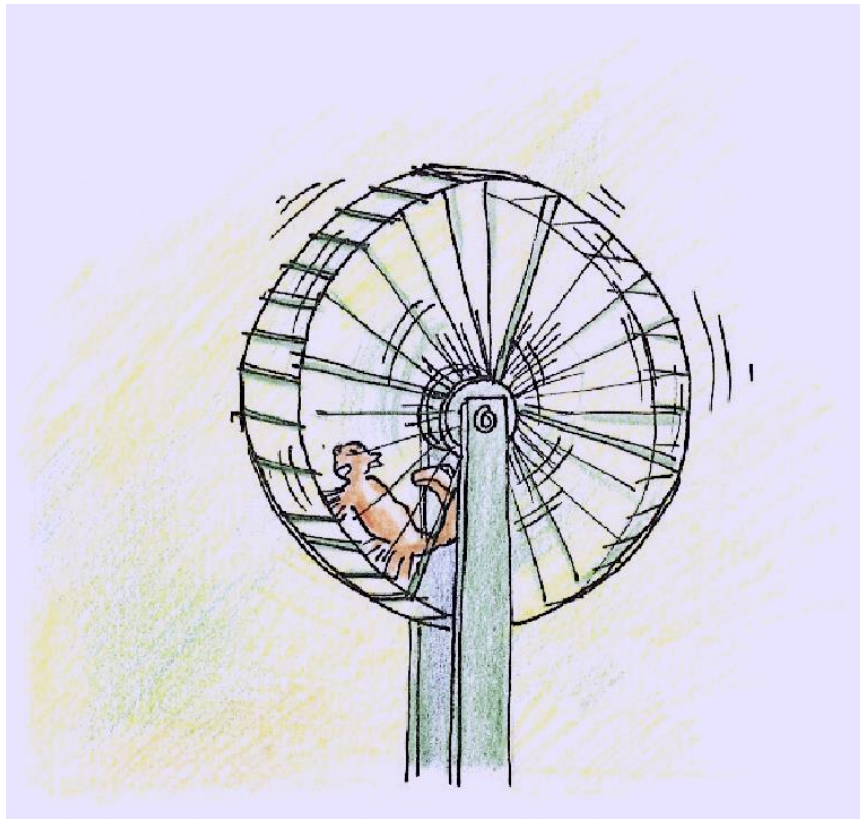


4장: 강체의 회전운동

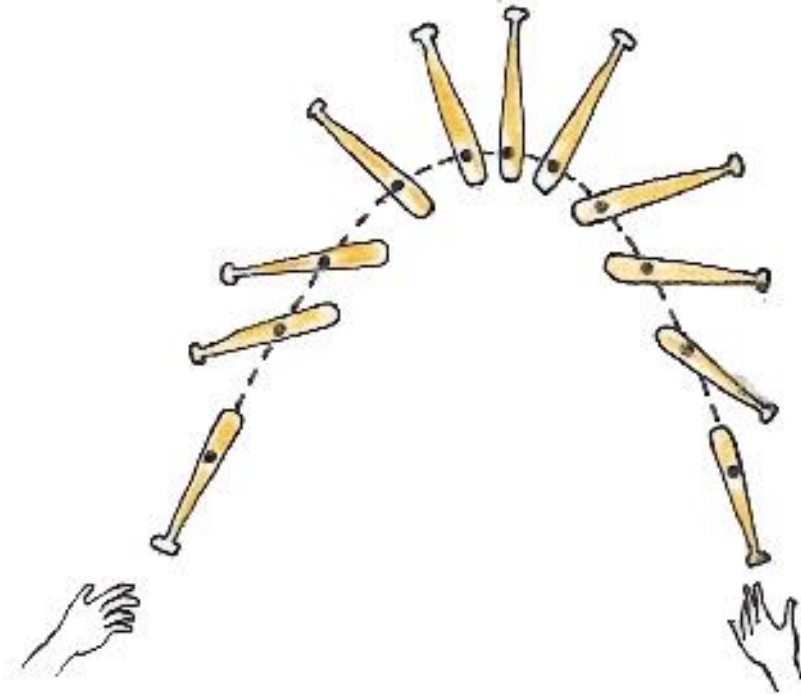


1. 회전운동과 각운동량
2. 각운동량의 보존
3. 토크와 세차운동
4. 회전운동에너지

회전운동과 각운동량

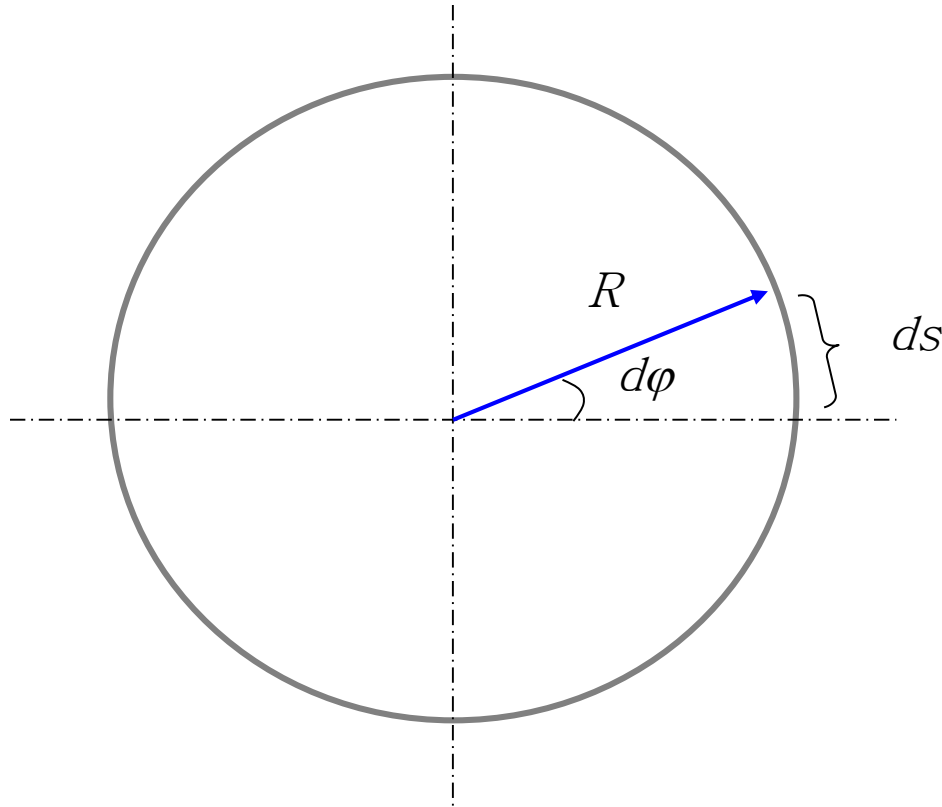
강체는 모양이 변하지 않기 때문에 각 질점의 움직임을 따로 따로 고려할 필요가 없다.

강체는 힘을 받아 운동하는 중에도 모양이 변형되지 않는다.



강체의 운동은 아무리 복잡한 운동이라 할지라도 질량중심 (CM) 운동과, 3개의 회전축을 중심으로 하는 회전운동의 조합이다.

회전운동



1 cps (cycle per second) $\equiv$ 1 Hz
 $=$ 60 rev/min or 60 rpm

주기 T

$$2\pi R = vT \rightarrow T = \frac{2\pi R}{v}$$

각속도 ω [rad/s]

$$ds = R d\phi$$

$$ds/dt = v = R d\phi/dt$$

$$\omega \equiv d\phi/dt$$

$$\therefore v = R\omega$$

진동수 f

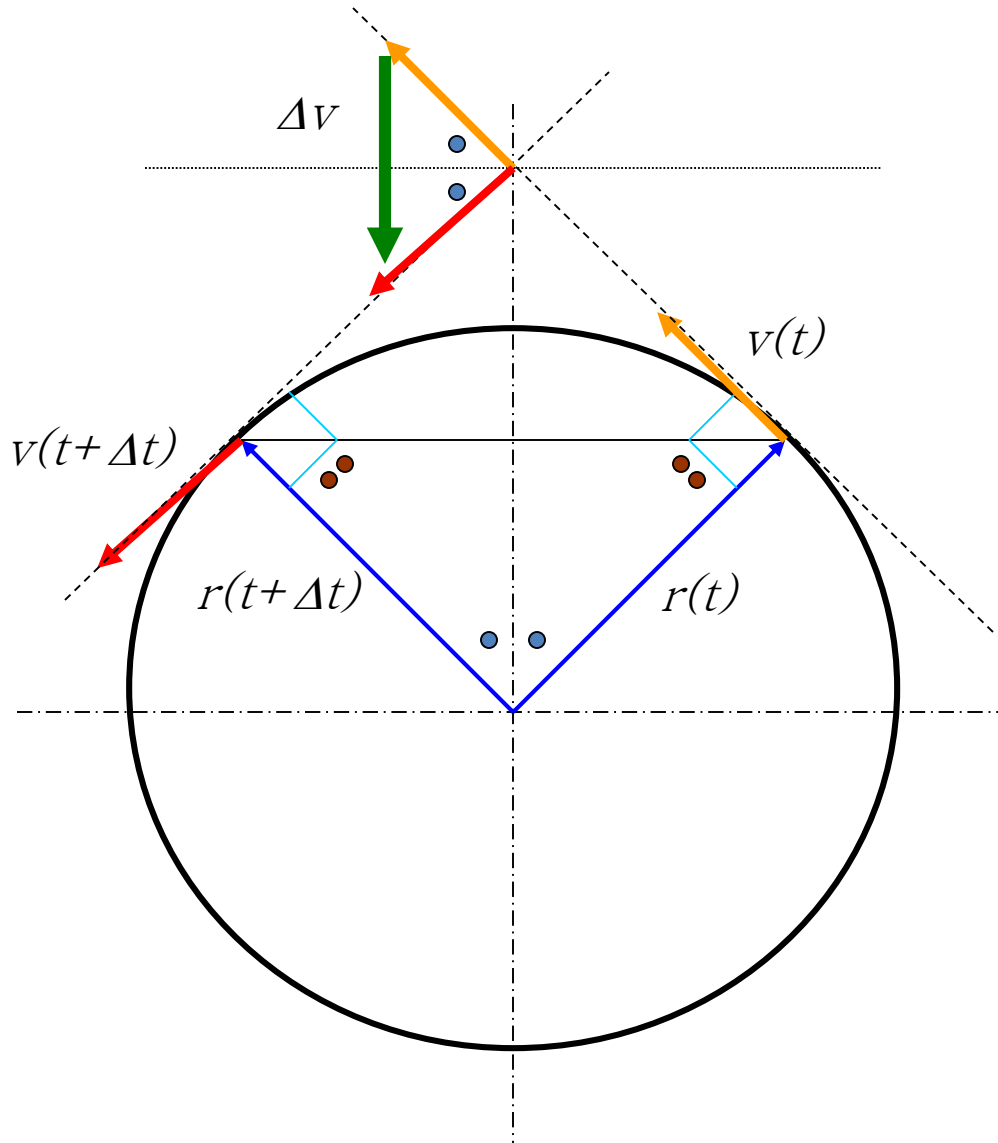
$$T = 2\pi R/v = 2\pi/\omega$$

$$\omega = 2\pi/T$$

$$f \equiv 1/T$$

$$\omega = 2\pi f \quad \text{전북대학교 물리학과}$$

등속 원운동



구심가속도의 정의

$$\Delta v = v(t + \Delta t) - v(t)$$

$$\Delta r = r(t + \Delta t) - r(t)$$

$$\Delta v / v = \Delta r / r$$

$$\therefore \Delta v / \Delta t = (v / r) (\Delta r / \Delta t)$$

$$\therefore a = v^2 / r = (r\omega)^2 / r = r\omega^2$$

$$\vec{a} = -\hat{r} v^2 / r$$

각가속도의 정의

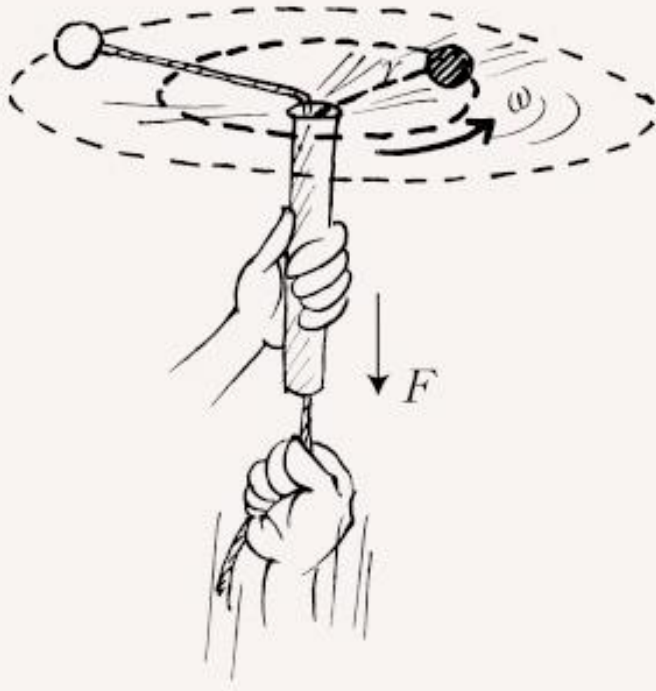
$$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$$

자전거 바퀴의 각속도

생각해 보기: 자전거의 뒷바퀴가 체인으로 발판과 연결되어 있다.
발판 톱니와 뒷바퀴 톱니의 비는 2:1 이다. 발판을 초당 3번 돌릴 때,
발판과 뒷바퀴의 각속도는 각각 얼마인가?



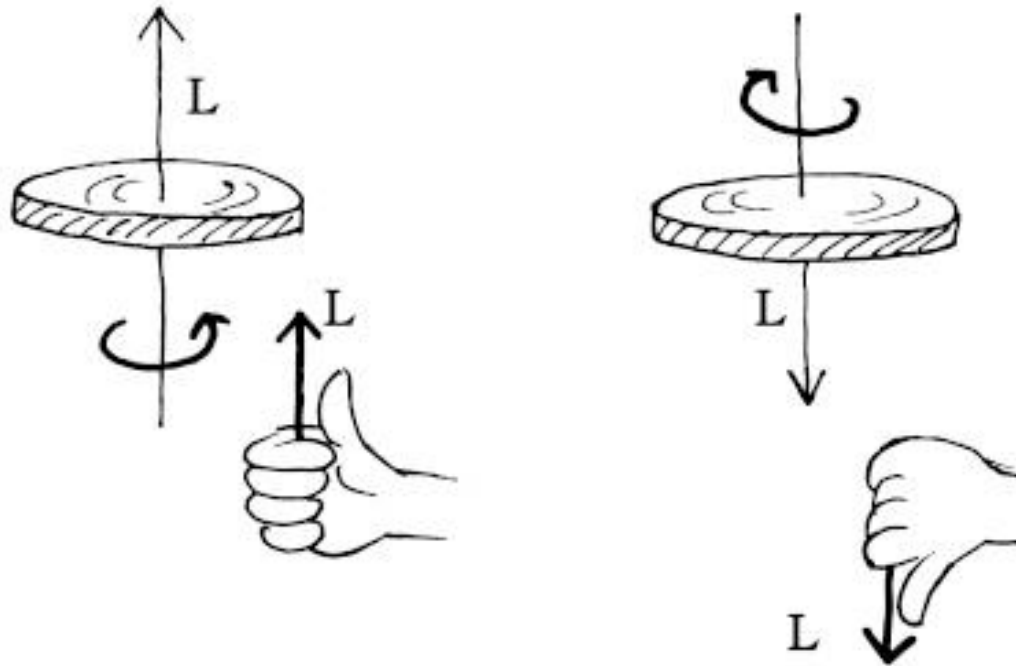
각운동량



질점이 원운동 할 때
각운동량을 다음과 같이
정의한다.

$$\text{각운동량} \\ L = r \times mv$$

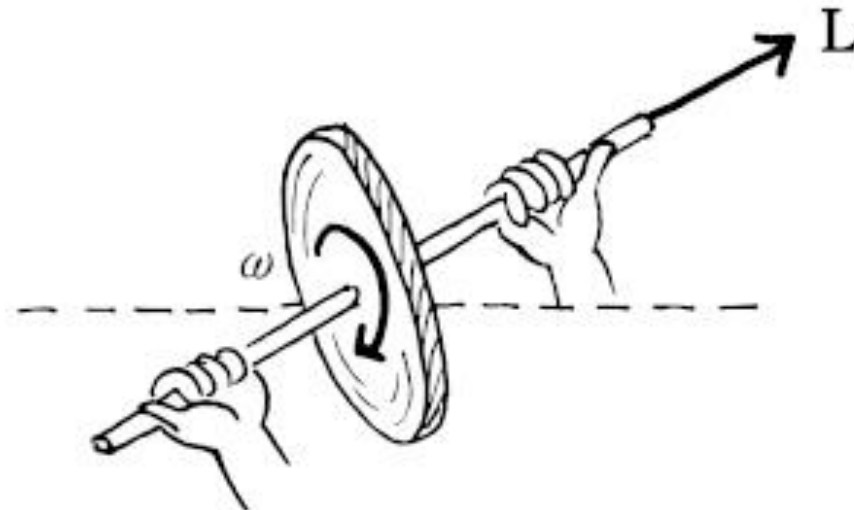
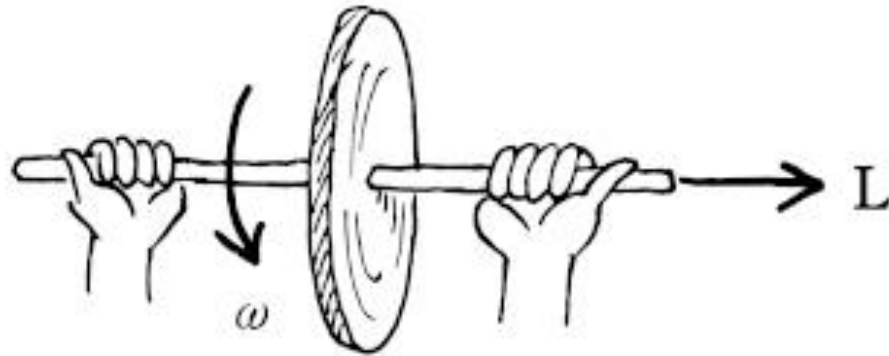
각운동량의 방향



각운동량의 방향은 회전축 방향으로 잡는다.

(힌트: 나사의 회전에 의한 진행 방향을 생각한다.)

회전판의 각운동량



바퀴의 각운동량

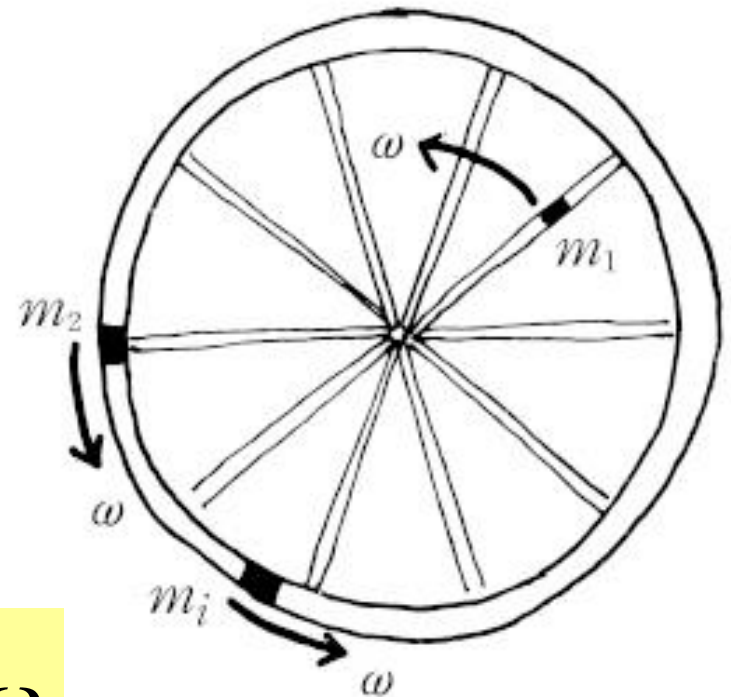
바퀴는 각 질점이 모여 강체를 이룬다.

강체에 있는 모든 질점의 각속도는 같다.

바퀴의 각운동량 L 은 바퀴를 이루는 각 질점의 모든 각운동량을 합한 것이다.

$$L = I \cdot \omega = \sum_i m_i r_i^2 \cdot \omega$$

I : 바퀴의 관성모멘트, ω : 각속도

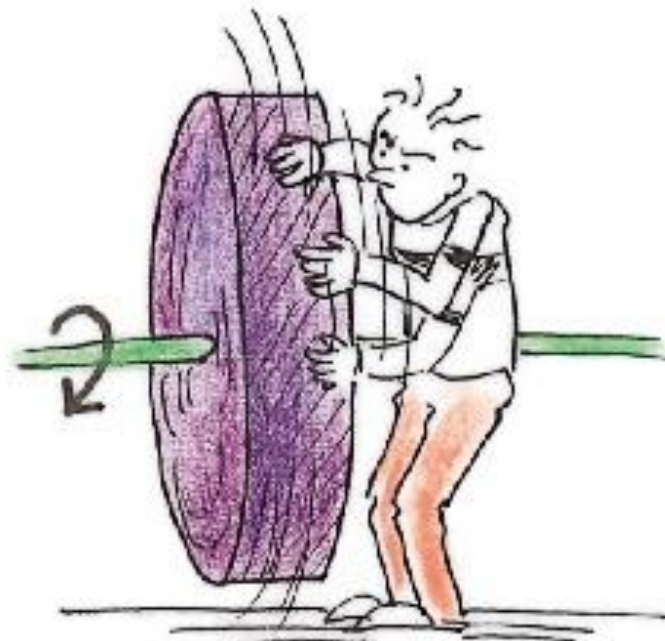


관성 모멘트의 정의

$$I = \sum_i m_i r_i^2$$



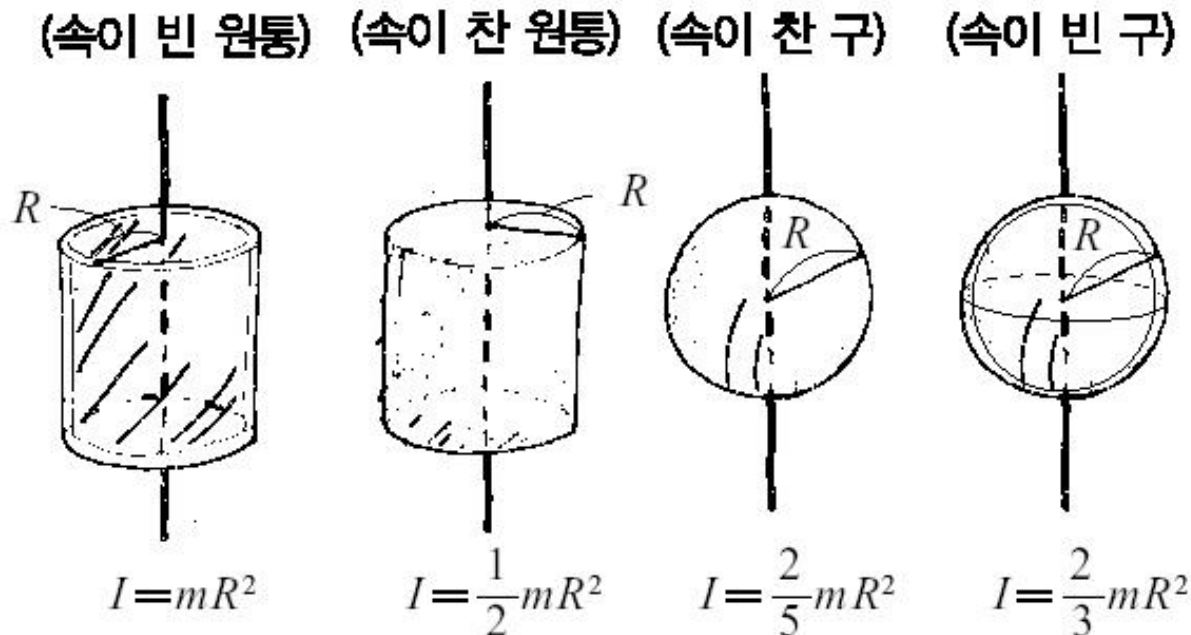
관성모멘트가 적다.



관성모멘트가 크다.

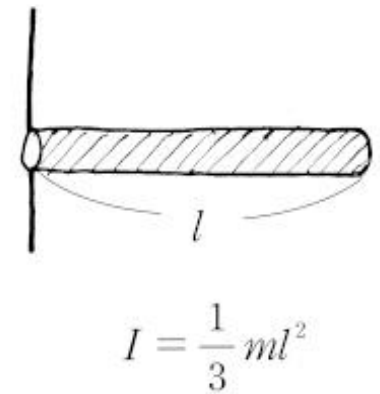
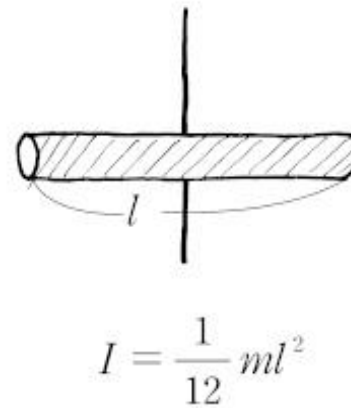
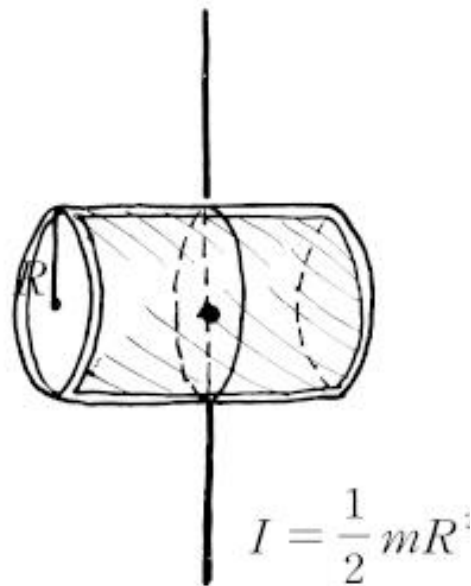
강체의 관성 모멘트

관성모멘트 - 모양에 따라 다르다

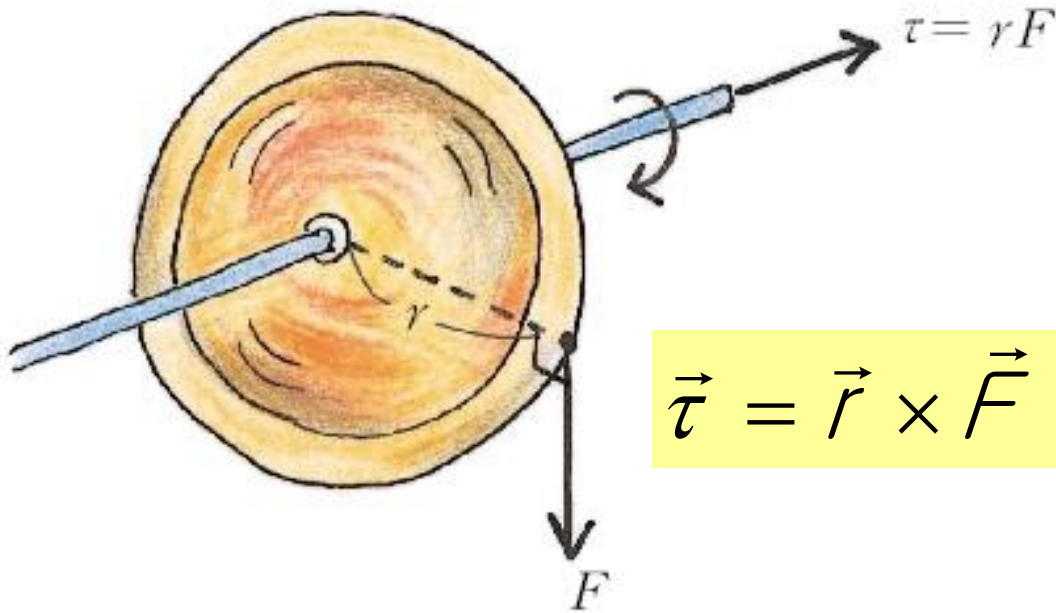


강체의 관성 모멘트

관성모멘트 - 회전축에 따라 다르다



강체의 회전과 토크

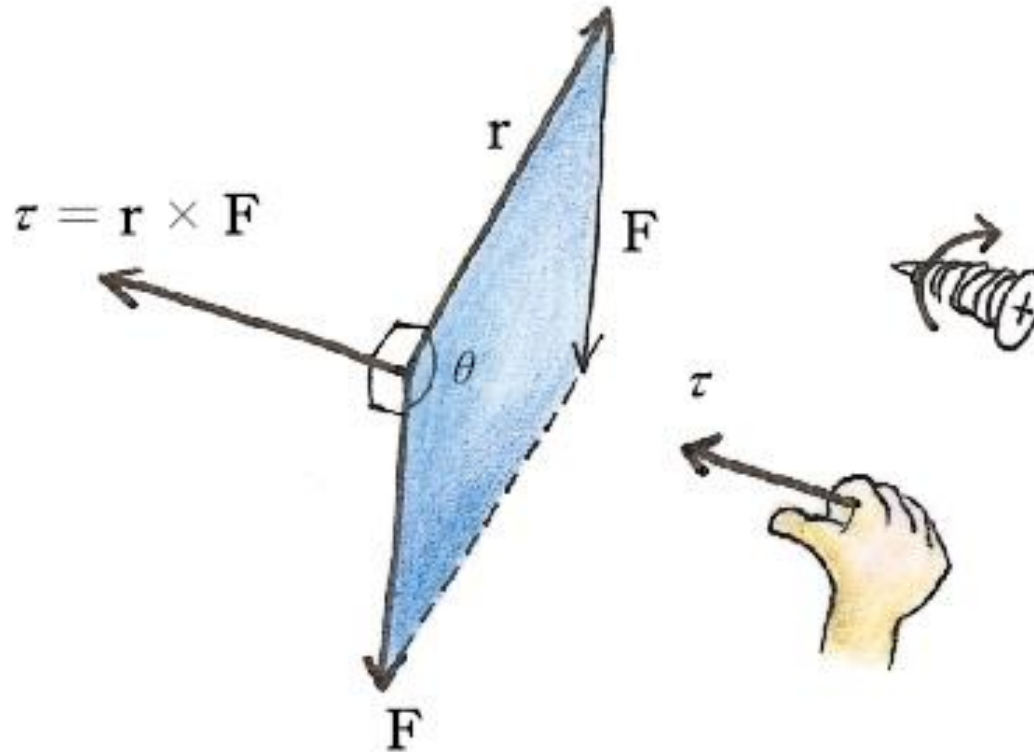


$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = \hat{n} |\vec{r}| |\vec{F}| \sin \theta$$

토크의 단위: [N·m]

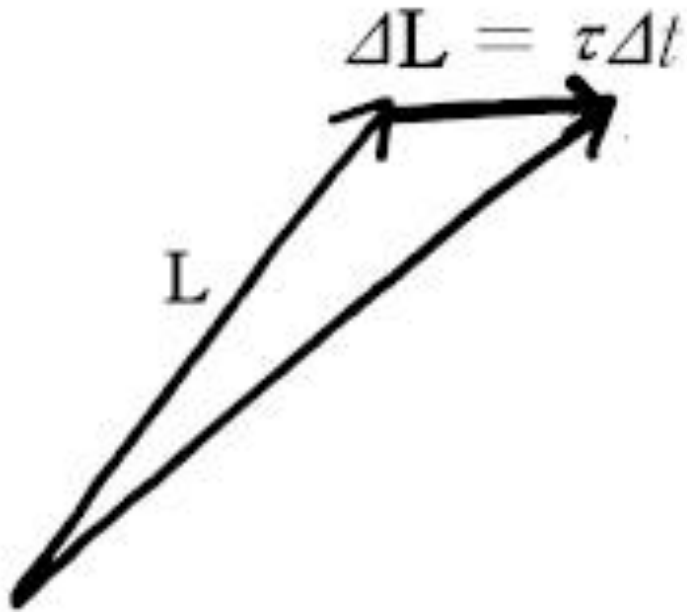
토크의 방향

벡터곱



(벡터의 방향을 위 팽이의 경우와 비교해 보라.)

토크와 각운동량



$$F = ma = m \frac{dv}{dt} = m \frac{d(r\omega)}{dt} = mr \frac{d\omega}{dt}$$

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d(mr^2\omega)}{dt} = mr^2 \frac{d\omega}{dt} = rF = \tau$$

$$\tau = \frac{\Delta L}{\Delta t} = \frac{I \Delta \omega}{\Delta t} = I \alpha$$

시간에 대한 각운동량의 변화량은 토크에 비례한다.

각운동량의 보존

외부에서 작용하는 토크가 없다면
각운동량이 보존된다.

$$\tau = \frac{\Delta L}{\Delta t} = 0$$

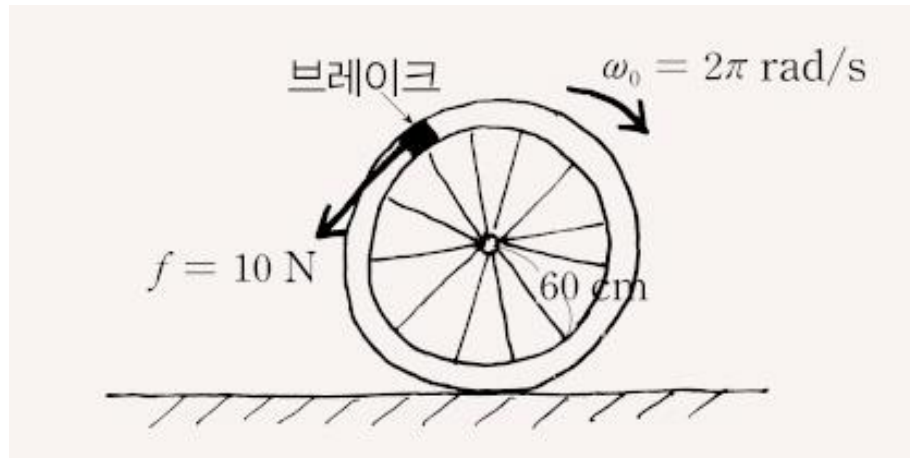
$$\therefore L = I\omega = \text{일정}$$

뉴턴 방정식 vs 회전운동 방정식

힘	F	$\longleftrightarrow$	토크	τ
가속도	a	$\longleftrightarrow$	각가속도	α
질량	m	$\longleftrightarrow$	관성모멘트	I
속도	v	$\longleftrightarrow$	각속도	ω
위치	x	$\longleftrightarrow$	각도	θ

회전하는 자전거 바퀴

생각해 보기: 반경 60 cm인 자전거 바퀴의 관성모멘트가 $I = 5 \text{ [kg m}^2\text{]}$ 이다. 브레이크로 각속도 $\omega_0 = 2\pi \text{ [rad/s]}$ 로 돌고 있는 바퀴에 일정한 힘 $F = 10 \text{ N}$ 을 가한다. 이 바퀴는 얼마 후에 정지하겠는가?



각운동량의 보존

<동영상>



각운동량의 보존

회전판 위에 서있는 사람이
자신의 팔을 움츠려 자신의 관성모멘트를 작게 한다.



팔을 움츠릴 때는 신체 각 부분사이에서 작용-반작용만이 작용하므로 외부에서 작용하는 **토크가 없다**.

따라서 **각운동량이 보존되므로**
팔을 움츠리면 회전 속도가 빨라진다.

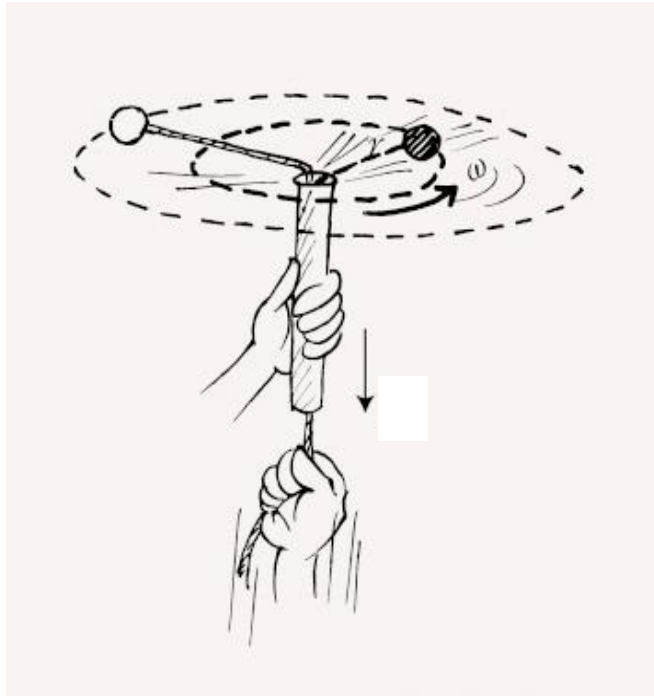
피겨 스케이트 선수

생각해 보기: 피겨스케이트 선수가 팔과 발을 움츠려 자신의 관성모멘트를 $\frac{1}{4}$ 만큼 줄였다. 처음에 회전수가 3회/s 였다면, 움츠린 후에는 얼마로 바뀌겠는가?



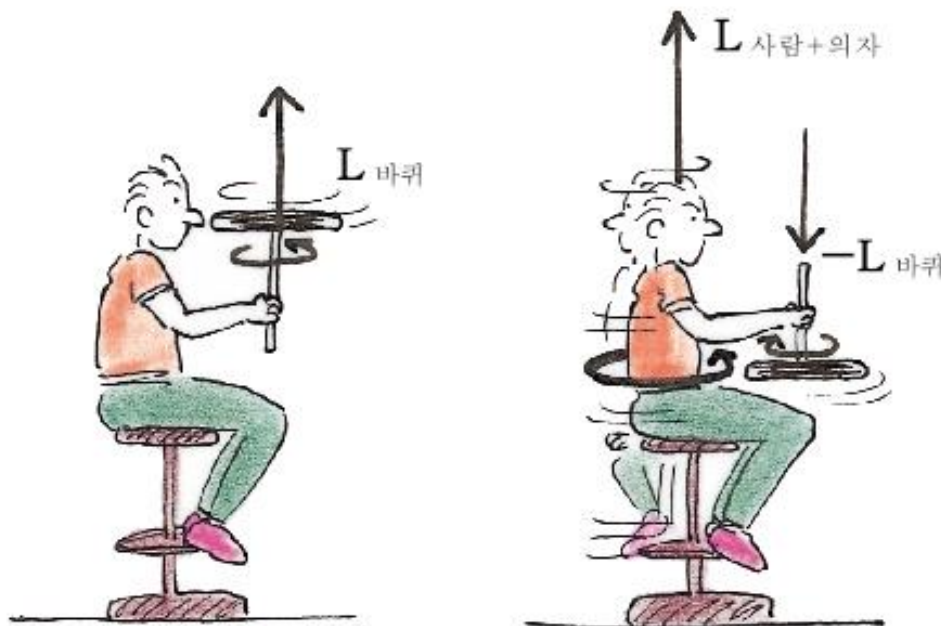
원운동 하는 물체

생각해 보기: 줄에 달린 공이 원운동하고 있다. 이 물체를 중심 쪽으로 잡아당겨 반경을 반으로 줄이면 각속력은 어떻게 변할까?



회전하는 바퀴 뒤집기

정지한 회전의자에 앉아 있는 사람이
회전하는 바퀴를 들고 있다가 바퀴의 축을 뒤집는다.



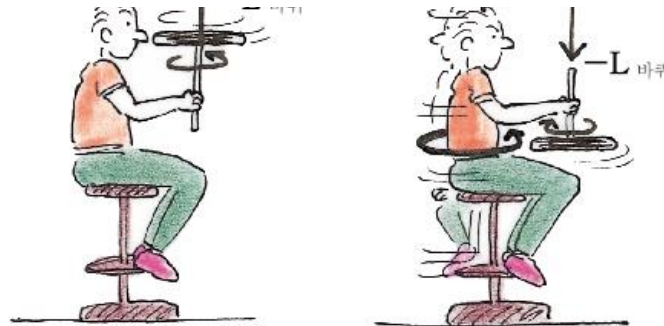
그러면 회전의자에 앉아 있던 사람도 회전하게 된다.

회전하는 바퀴 뒤집기

각운동량이 보존되어야 하기 때문이다.

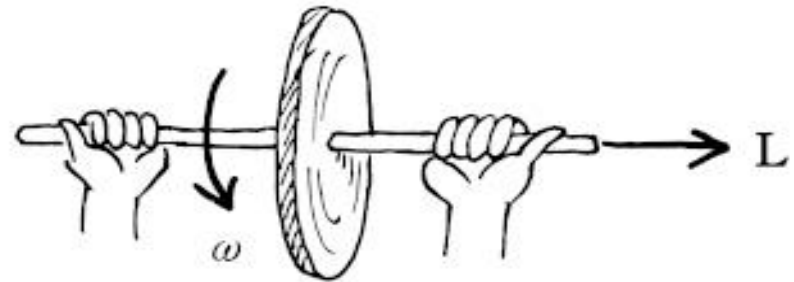
$$\uparrow = \downarrow + \uparrow$$

L 바퀴 $-L$ 바퀴 L 사람+의자

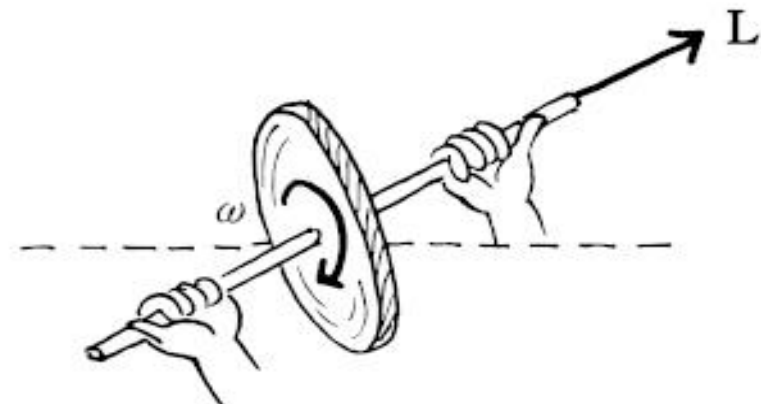


회전축 기울이기

회전하고 있는 바퀴의 축을 기울여보자.



회전하고 있는
바퀴의 축은
마치 공간에 축이
고정되어 있는 것처럼
그 방향을
바꾸려 하지 않는다.



각운동량은 **크기만 있는 것이 아니라 방향도 가지고 있는** 벡터량이라는 것을
직접 느낄 수 있다.

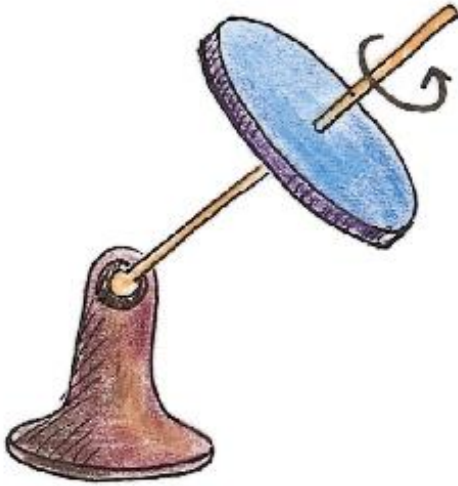
<동영상>



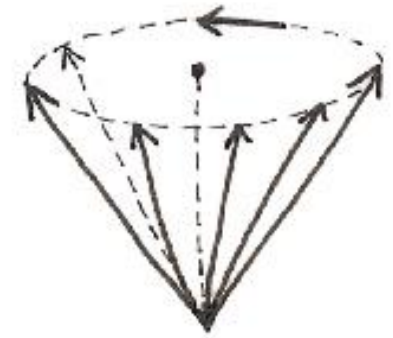
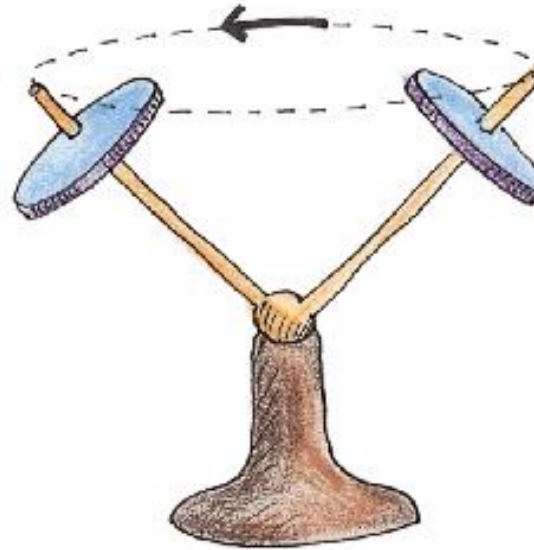
<동영상>



팽이의 세차운동



회전 받침대에 올려놓은 팽이의
회전축을 약간 기울여 돌게 하자.

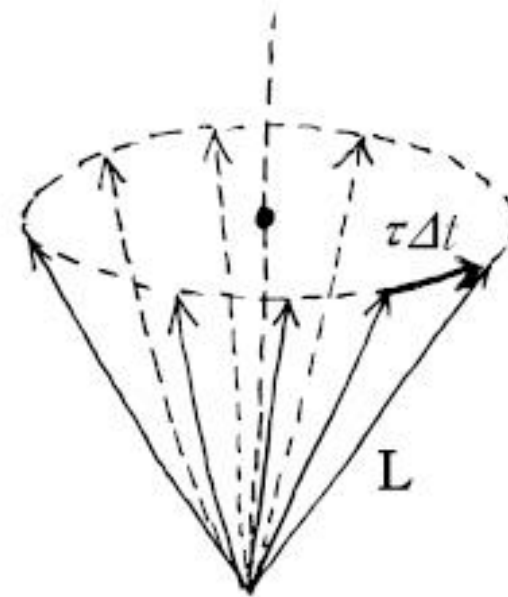
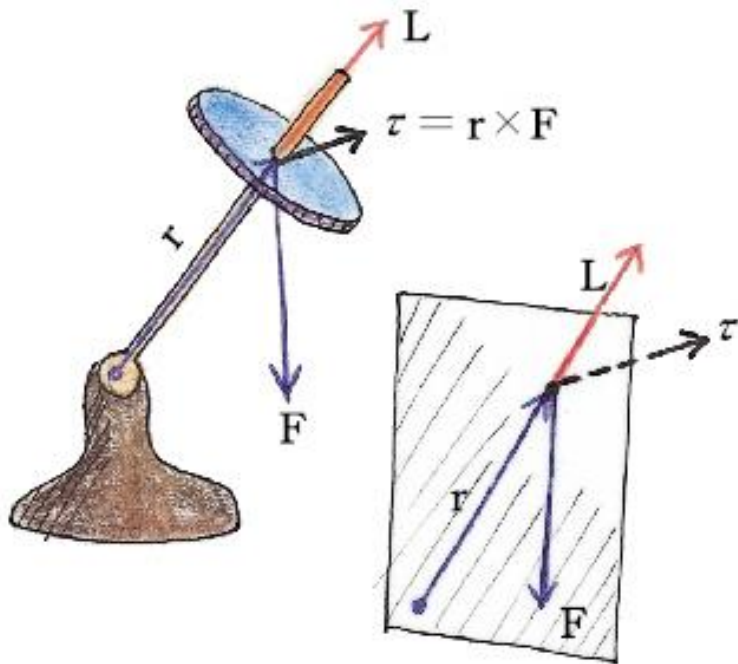


기울어진 팽이는 받침대 주위를 돌아간다.
이렇게 회전축 자체가 회전하는 현상을
세차운동이라고 한다. 세차운동은 왜
생길까?

팽이의 세차운동

세차운동의 원인은 팽이에 작용하는 토크에 있다.

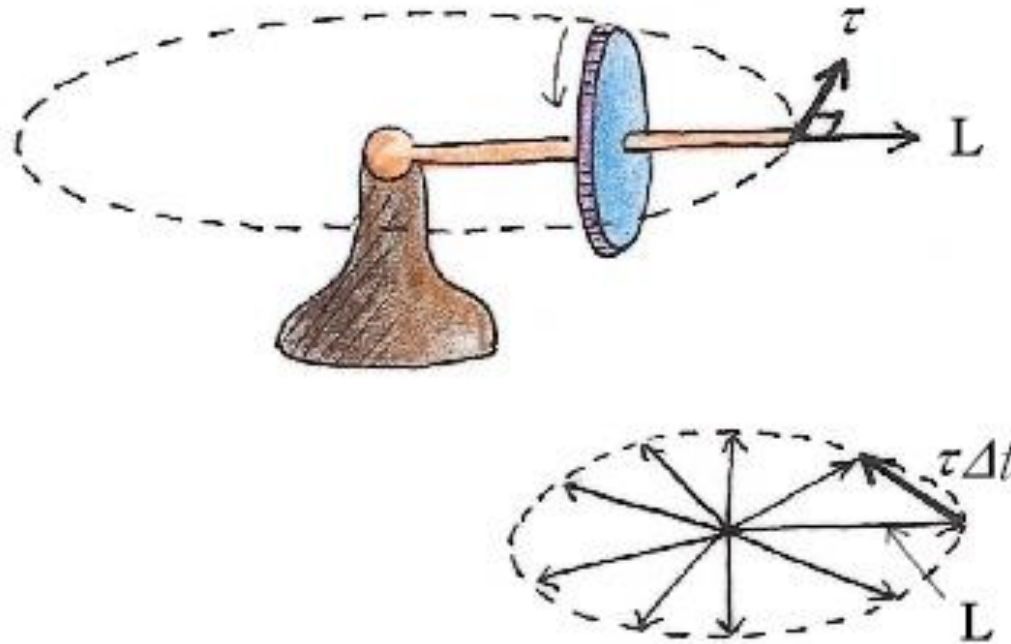
중력이 작용하는 토크의 방향은
팽이의 각운동량 방향(회전축)과 수직이다
이 토크는 각운동량의 방향만을 바꾼다.



결국, 각운동량 벡터는 원뿔모양의 궤적을 그리며 돈다. 즉, 팽이의 세차운동이 일어난다.

팽이의 세차운동

팽이를 더욱 기울여보자.



이 경우에도 토크는 각운동량과 수직하게 작용한다.

팽이는 평면에서 원운동을 그리는 세차운동을 한다

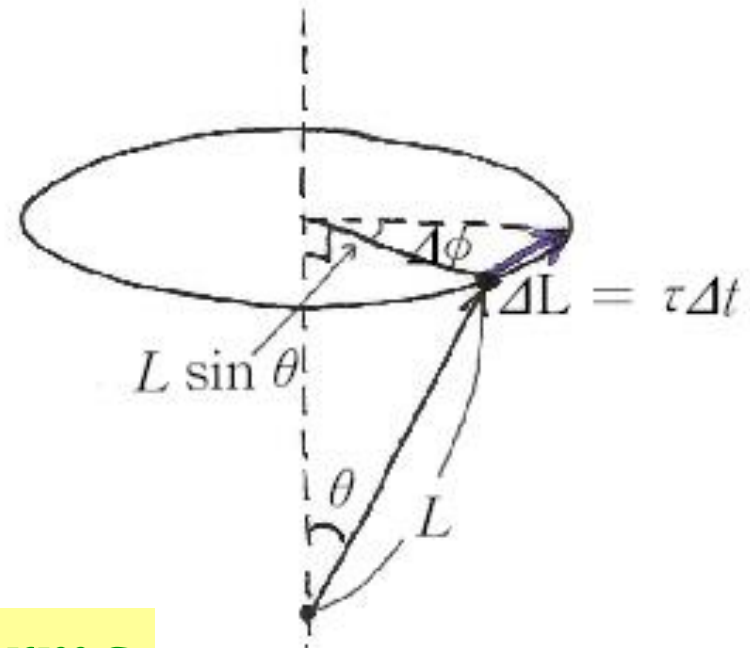
세차운동의 각속도

세차운동의 각속도는 어떻게 결정되는가?

$$\Delta L = L \sin \theta \Delta \phi$$

$$\Delta L = L \sin \theta \cdot \Delta \phi = \tau \cdot \Delta t$$

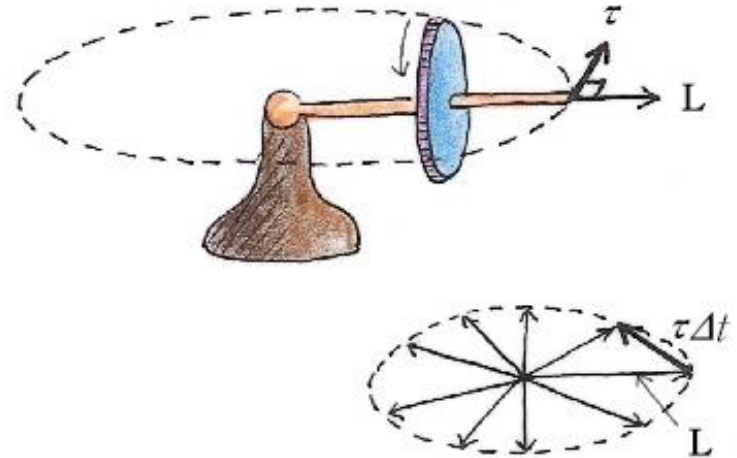
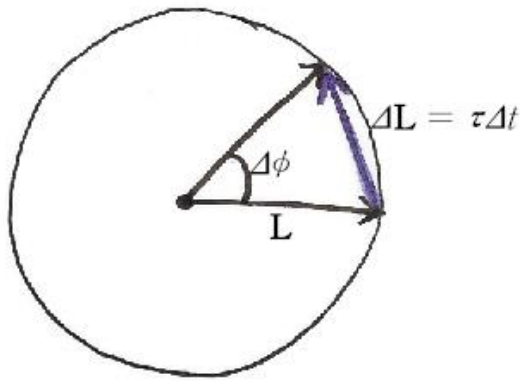
$$\tau = rmg \sin \theta$$



$$\Omega = \frac{\Delta \phi}{\Delta t} = \frac{\tau}{L \sin \theta} = \frac{rmg \sin \theta}{L \sin \theta} = \frac{rmg}{L}$$

팽이의 세차각속도

팽이의 세차 각속도는 축이 기울어져 있으나 수직하게 뉘어져 있으나 동일하다.



$$\Delta L = L\Delta\phi = \tau\Delta t$$

세차 각속도

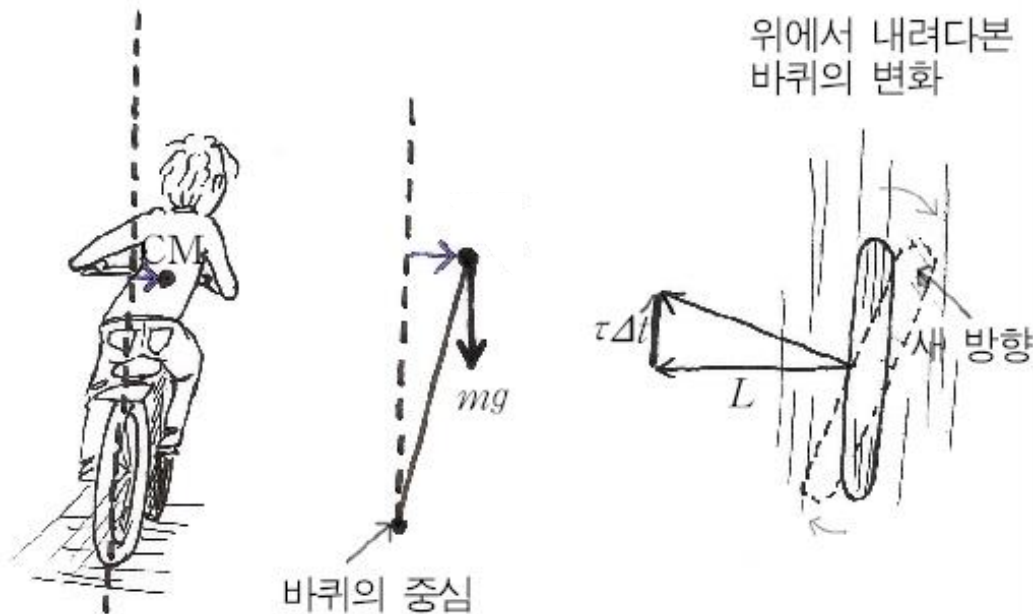
$$\Omega = \frac{\Delta\phi}{\Delta t} = \frac{\tau}{L} = \frac{rmg}{L}$$





자전거 타고 방향 바꾸기

자전거의 방향은 어떻게 바뀌는 것일까?



상체를 약간 오른쪽으로 움직이자.
질량중심이 자전거 축으로부터
약간 벗어나면서 토크가 생긴다.

이 토크는 자전거 바퀴의
각운동량을 변화시키므로 바퀴는
세차운동을 하게 되어 바퀴의
방향이 바뀐다.

오른쪽으로 상체를 약간 기울이면 오른쪽으로 방향이 바뀌고,
왼쪽으로 상체를 약간 기울이면 왼쪽으로 방향이 바뀐다.

역학적 에너지

$$E = \frac{1}{2}mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + mgh$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{2}m_i v_i^2 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2}m_i (r_i \omega)^2 = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n m_i r_i^2 \right) \omega^2 = \frac{1}{2} I \omega^2$$

토크와 회전운동에너지의 변화

강체에 토크를 가하면 강체의 회전속도가 바뀐다.
이는 외부에서 가해진 에너지에 의해 강체의
회전운동에너지가 변하고 있음을 나타낸다.

외부에서 시간당 공급하는 에너지는 시간에 대한
회전운동에너지의 변화율과 같으므로,

$$P = \frac{dK}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} I \omega^2 \right) = I \frac{d\omega}{dt} \omega$$

토크는 다음과 같이 주어진다.

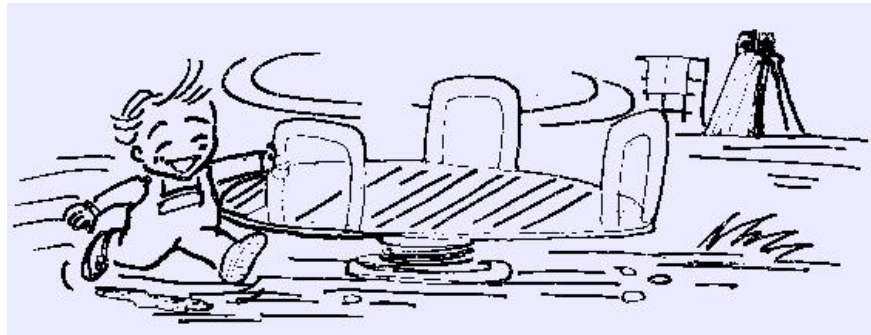
$$\tau = I \frac{d\omega}{dt}$$

따라서 $P = \tau \omega$

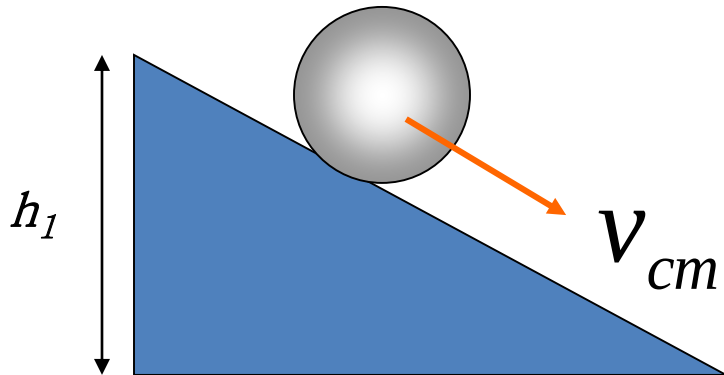


토크와 회전운동에너지의 변화

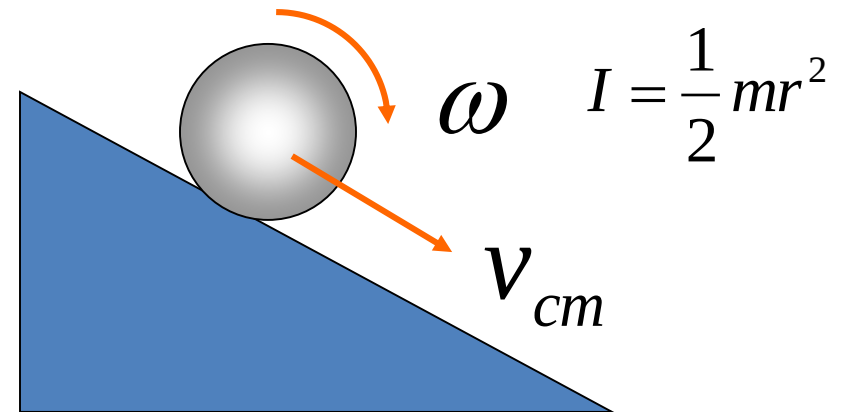
생각해 보기: 놀이터의 회전판을 어린이가 정지상태로부터 3 초 후에
각속력 $\omega = 2 \text{ rad/s}$ 로 회전시킬 때 공급해야 할 에너지는?
회전판의 회전모멘트 $I = 100 \text{ kgm}^2$ 이다.



빗면을 내려가는 속이 찬 원기둥



미끄러져 내려올 때



회전운동하며 내려올 때

단원요약

◆ 회전운동

- 각속도: $\omega = \Delta\theta/\Delta t = 2\pi/T = 2\pi f$, 각가속도: $\alpha = d\omega/dt$

- $v = r\omega$, $\alpha = r\omega^2 = v^2/r$

◆ 각운동량: $L = I\omega$

◆ 토크: $\tau = dL/dt$

◆ 외부에서 작용하는 토크가 없으면 각운동량이 보존된다.

◆ 회전축을 움직이기 위해 토크를 가하면 회전하는 물체는 세차운동을 한다.
이 때 세차각속도의 크기를 Ω 라고 하면 $\tau = L \sin\theta \Omega$ 로 표시된다.

◆ 총 운동 에너지 = 회전운동 에너지 + 병진운동 에너지

$$K = K_R (1/2 I\omega^2) + K_T (1/2 mv^2)$$